QA
36
.E56
v.2
pt.5

ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

HERAUSGEGEBEN
IM AUFTRAGE DER AKADEMIEEN DER WISSENSCHAFTEN
ZU GÖTTINGEN, LEIPZIG, MÜNCHEN UND WIEN
SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER FACHGENOSSEN.

IN SIEBEN BÄNDEN.

BAND I: ARITHMETIK U. ALGEBRA, RED. VON W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG.
— II: ANALYSIS, IN 2 TEILEN. . . . . H. BURKHARDT IN ZÜRICH.
— III: GEOMETRIE, IN 3 TEILEN. . . . . W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG.
— IV: MECHANIK, IN 2 TEILEN . . . . . F. KLEIN IN GÖTTINGEN UND C. H. MÜLLER IN GÖTTINGEN.
— V: PHYSIK, IN 2 TEILEN. . . . . A. SOMMERFELD IN AACHEN.
— VI, 1: GEODÄSIE UND GEOPHYSIK . . PH. FURTWÄNGLER IN POTSDAM UND E. WIECHERT IN GÖTTINGEN.
— VI, 2: ASTRONOMIE . . . . . K. SCHWARZSCHILD IN GÖTTINGEN.
— VII: HISTORISCHE, PHILOSOPHISCHE UND DIDAKTISCHE FRAGEN BEHANDELND. REDAKTION NOCH NICHT BESTIMMT.

BAND II1. HEFT 5.

A. SOMMERFELD IN AACHEN: RANDWERTAUFGABEN IN DER THEORIE DER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN. (SCHLUSS.)
A. KNESER IN BERLIN: VARIATIONSRECHNUNG.
E. ZERMELO UND H. HAHN IN GÖTTINGEN: WEITERENTWICKELUNG DER VARIATIONSRECHNUNG IN DEN LETZTEN JAHREN.
H. BURKHARDT IN ZÜRICH: TRIGONOMETRISCHE INTERPOLATION (MATHEMATISCHE BEHANDLUNG PERIODISCHER NATURERSCHEINUNGEN).
A. WANGERIN IN HALLE A. S.: THEORIE DER KUGELFUNKTIONEN UND DER VERWANDTEN FUNKTIONEN, INSBESONDERE DER LAMÉ'SCHEN UND BESSEL'SCHEN (THEORIE SPEZIELLER, DURCH LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DEFINIERTER FUNKTIONEN).

AUSGEGEBEN AM 6. AUGUST 1904.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1904.

☞ Auf Beschluß der Akademie-Kommission werden von jetzt ab die Hefte steif broschiert und beschnitten ausgegeben.

☞ Jeder Band ist einzeln käuflich. — Bisher erschien: Bd. I, Heft 1—7; Bd. II1, Heft 1—5; Bd. II2, Heft 1; Bd. III2, Heft 1—2; Bd. III3, Heft 1—3; Bd. IV1, Heft 1—3; Bd. IV2, Heft 1—2; Bd. V1, Heft 1; Bd. V2, Heft 1.

☞ Einbanddecken in Halbfranz werden auf Bestellung mit dem Schlußheft eines jeden Bandes zu wohlfeilen Preisen von der Verlagsbuchhandlung geliefert.

Unter der Presse:

Band I. Unendliche Prozesse mit komplexen Termen. Von **Alfred Pringsheim** in München. — Register und Vorrede zu Band I. Von **Franz Meyer** in Königsberg i/Pr.
- III. Teil 1. Die Begriffe „Linie" und „Fläche". Von **H. v. Mangoldt** in Aachen. — Prinzipien der Geometrie. Von **F. Enriques** in Bologna.
- IV. - 1. Die Mechanik der einfachsten physikalischen Apparate und Versuchsanordnungen. Von **Ph. Furtwängler** in Potsdam. — Physiologische Mechanik. Von **O. Fischer** in Leipzig. — Spiel und Sport. Von **G. T. Walker** in Constantia, Simla (Indien).
- V. - 1. Wärmeleitung. Von **E. W. Hobson** in Cambridge und **H. Dießelhorst** in Charlottenburg. — Technische Thermodynamik. Von **M. Schröter** in München.
- VI. - 1. Niedere Geodäsie. Von **C. Reinhertz** in Hannover.
- VI. - 2. Reduktion der astronomischen Beobachtungen. Von **Fritz Cohn** in Königsberg.

Aufgabe der Encyklopädie ist es, in knapper, zu rascher Orientierung geeigneter Form, aber mit möglichster Vollständigkeit eine Gesamtdarstellung der mathematischen Wissenschaften nach ihrem gegenwärtigen Inhalt an gesicherten Resultaten zu geben und zugleich durch sorgfältige Literaturausgaben die geschichtliche Entwicklung der mathematischen Methoden seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts nachzuweisen. Sie beschränkt sich dabei nicht auf die sogenannte reine Mathematik, sondern berücksichtigt auch ausgiebig die Anwendungen auf Mechanik und Physik, Astronomie und Geodäsie, die verschiedenen Zweige der Technik und andere Gebiete, und zwar in dem Sinne, daß sie einerseits den Mathematiker orientiert, welche Fragen die Anwendungen an ihn stellen, andererseits den Astronomen, Physiker, Techniker darüber orientiert, welche Antwort die Mathematik auf diese Fragen gibt. In 7 Bänden werden die einzelnen Gebiete in einer Reihe sachlich angeordneter Artikel behandelt; jeder Band soll ein ausführliches alphabetisches Register enthalten. Auf die Ausführung von Beweisen der mitgeteilten Sätze muß natürlich verzichtet werden. — Die Ansprüche an die Vorkenntnisse der Leser sollen so gehalten werden, daß das Werk auch demjenigen nützlich sein kann, der nur über ein bestimmtes Gebiet Orientierung sucht. — Eine von den beteiligten gelehrten Gesellschaften niedergesetzte Kommission, z. Z. bestehend aus den Herren

W. v. Dyck-München, **G. v. Escherich**-Wien, **O. Hölder**-Leipzig, **F. Klein**-Göttingen,
ferner **L. Boltzmann**-Wien, **H. v. Seeliger**-München, **H. Weber**-Straßburg,

steht der Redaktion, die aus den Herren

H. Burkhardt-Zürich, **F. Klein**-Göttingen, **W. Fr. Meyer**-Königsberg, **C. H. Müller**-Göttingen,
K. Schwarzschild-Göttingen, **A. Sommerfeld**-Aachen und **E. Wiechert**-Göttingen

besteht, zur Seite. — Als Mitarbeiter an der Encyklopädie beteiligen sich ferner die Herren

M. Abraham-Göttingen
W. Ahrens-Magdeburg
E. Anding-München
P. Bachmann-Weimar
J. Bauschinger-Berlin
R. Berzolari-Pavia
M. Bôcher-Cambridge, Mass.
G. Bohlmann-Berlin
L. Boltzmann-Wien
L. v. Bortkewitsch-St. Petersburg
E. W. Brown-Haverford
G. Brunel †
G. H. Bryan-Bangor, Wales
H. Burkhardt-Zürich
L. Caspari-Paris
G. Castelnuovo-Rom
C. V. L. Charlier-Lund
F. Cohn-Königsberg i. Pr.
G. Cohn-Wien
C. Cranz-Berlin
E. Czuber-Wien
G. H. Darwin-Cambridge
Th. Descoudres-Leipzig
H. Diesselhorst-Berlin
F. Dingeldey-Darmstadt
R. Emden-München
F. Enriques-Bologna
G. Faber-Traunstein
G. Fano-Turin
S. Finsterwalder-München
O. Fischer-Leipzig
Ph. Forchheimer-Graz
R. Fricke-Braunschweig
Ph. Furtwängler-Potsdam
F. K. Ginzel-Berlin
M. Grübler-Dresden
C. Guichard-Clermont-Ferrand
H. Hahn-Wien
J. Harkness-Bryn Mawr Coll., Pa.
P. Heegard-Kopenhagen
L. Henneberg-Darmstadt
K. Hensel-Marburg a./L.
J. v. Hepperger-Wien
H. Hergesell-Straßburg
G. Herglotz-Göttingen
K. Heun-Karlsruhe
D. Hilbert-Göttingen
E. W. Hobson-Cambridge
J. H. van't Hoff-Berlin
O. Hölder-Leipzig
S. Hough-Kapstadt
G. Jung-Mailand
H. Kamerlingh-Onnes-Leiden
A. Kneser-Berlin
H. Kobold-Kiel
A. Krazer-Straßburg
A. Kriloff-Petersburg
H. Lamb-Manchester
G. Landsberg-Heidelberg
Th. Liebisch-Göttingen
H. Liebmann-Leipzig
R. v. Lilienthal-Münster
H. A. Lorentz-Leiden
A. E. H. Love-Oxford
H. M. Macdonald-Cambridge
H. v. Mangoldt-Aachen
L. Maurer-Tübingen
R. Mehmke-Stuttgart
W. Fr. Meyer-Königsberg i. P.
W. Meyerhoffer-Berlin
G. Mie-Greifswald
H. Minkowski-Göttingen
F. R. Moulton-Chicago
O. Mügge-Königsberg i. Pr.
E. Müller-Wien
E. Netto-Gießen
J. Neuberg-Lüttich
G. v. Niessl-Brünn
S. Oppenheim-Prag
E. v. Oppolzer-Innsbruck
W. F. Osgood-Cambridge,
P. Painlevé-Paris [Mass.
E. Papperitz-Freiberg i. S.
V. Pareto-Lausanne
J. M. Pernter-Wien
J. Petersen-Kopenhagen
S. Pincherle-Bologna
P. Pizzetti-Pisa
F. Pockels-Heidelberg
L. Prandtl-Hannover
A. Pringsheim-München
R. Reiff-Stuttgart
C. Reinhertz-Hannover
F. Ristenpart-Berlin
K. Rohn-Dresden
K. Runge-Hannover
G. Scheffers-Darmstadt
A. Schmidt-Potsdam
A. Schoenflies-Königsberg i. Pr.
M. Schröter-München
H. Schubert-Hamburg
L. Schulhof-Paris
K. Schwarzschild-Göttingen
C. Segre-Turin
D. Seliwanoff-St. Petersburg
M. Simon-Straßburg i. E.
J. Sommer-Bonn
A. Sommerfeld-Aachen
P. Stäckel-Kiel
O. Staude-Rostock
H. Steinitz-Charlottenburg
E. Study-Bonn
K. Sundmann-Helsingfors
O. Tedone-Genua
E. Timerding-Elsfleth i. O.
W. Trabert-Wien
K. Th. Vahlen-Königsberg
E. Vessiot-Lyon
A. Voss-München
G. T. Walker-Constantia, Simla (Indien)
E. Wälsch-Brünn
A. Wangerin-Halle
E. v. Weber-München
H. Weber-Straßburg i. E.
J. Wellstein-Gießen
E. T. Whittaker-Cambridge
E. Wiechert-Göttingen
W. Wien-Würzburg
A. Wiman-Lund
W. Wirtinger-Wien
C. W. Wirtz-Straßburg i. E.
H. v. Zeipel-Pulkowa
J. Zenneck-Straßburg i. E.
E. Zermelo-Göttingen
H. G. Zeuthen-Kopenhagen

Band II: Analysis, in 2 Teilen. Redigiert von H. Burkhardt in Zürich.

* = ist erschienen.

I. Teil.

Vorwort zu Band II von **H. Burkhardt** in Zürich.
Inhaltsverzeichnis von Band II, Teil 1.

A. Analysis reeller Größen.

*1. Grundlagen der allgemeinen Funktionenlehre: **A. Pringsheim** in München.
*2. Differential- u. Integralrechn.: **A. Voss** in Würzburg.
*3. Bestimmte Integrale: **G. Brunel** †.
*4. Gewöhnliche Differentialgleichungen:
  *4a. Existenz der Lösungen: **P. Painlevé** in Paris.
  *4b. Integrationsmethoden: **E. Vessiot** in Lyon.
*5. Partielle Differentialgleichungen: **E. v. Weber** in München.
*6. Kontinuierliche Transformationsgruppen: **L. Maurer** in Tübingen und **H. Burkhardt** in Zürich.
*7. Randwertaufgaben:
  *7a. Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen: **M. Bôcher** in Cambridge, Mass.
  *7b. Potentialtheorie (Theorie der Laplace-Poissonschen Differentialgleichung): **H. Burkhardt** in Zürich und **W. Fr. Meyer** in Königsberg.
  *7c. Randwertaufgaben in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen: **A. Sommerfeld** in Aachen.
*8. Variationsrechnung: **A. Kneser** in Berlin.
  *8a. Weiterentwickelung der Variationsrechnung in den letzten Jahren: **E. Zermelo** und **H. Hahn** in Göttingen.

[Fortsetzung auf letzter Umschlagseite.]

Soeben erschien:

BIBLIOGRAPHIE
DER DEUTSCHEN UNIVERSITÄTEN.

SYSTEMATISCH GEORDNETES VERZEICHNIS
DER BIS ENDE 1899 GEDRUCKTEN BÜCHER UND AUFSÄTZE
ÜBER DAS DEUTSCHE UNIVERSITÄTSWESEN.

IM AUFTRAGE DES PREUSSISCHEN UNTERRICHTS-MINISTERIUMS
BEARBEITET VON
WILHELM ERMAN UND EWALD HORN.

ERSTER, ALLGEMEINER TEIL,
UNTER MITWIRKUNG VON E. HORN BEARBEITET VON W. ERMAN.
[XX u. 836 S.] Lex.-8. 1904. geh. *M.* 30.—, geb. *M.* 36.—

ZWEITER, SPEZIELLER TEIL,
UNTER MITWIRKUNG VON W. ERMAN BEARBEITET VON E. HORN.
(UNTER DER PRESSE.)

DRITTER TEIL,
REGISTER UND NACHTRÄGE ENTHALTEND, BEARBEITET VON W. ERMAN.
(IN VORBEREITUNG.)

Die Bibliographie der deutschen Universitäten verzeichnet in systematischer Anordnung und mit dem Streben nach möglichster Vollständigkeit die bis Ende 1899 erschienenen, die deutschen Universitäten behandelnden Druckschriften, einschließlich der Aufsätze in Zeitschriften und Sammelwerken; in einer Auswahl sind auch solche Werke nachgewiesen, die nur teilweise, in einzelnen Kapiteln und Abschnitten, das Universitätswesen betreffen. Die Titelaufnahmen beruhen, soweit

irgend möglich, auf Autopsie. Von den Bibliotheken, in denen die Werke aufgefunden wurden, ist im allgemeinen bei jedem Buch mindestens eine namhaft gemacht. Für die nicht selbst gesehenen Schriften sind die Quellen nachgewiesen, aus denen die Titel entnommen sind.

Bei der Exzerpierung der Zeitschriften und Sammelwerke wurden die Bestände der Berliner Königlichen Bibliothek zugrunde gelegt; darüber hinaus wurden noch solche durchgesehen, von denen erhebliche Ausbeute zu erwarten war.

Die Begrenzung des Gebiets mußte sehr weit gefaßt werden, da nach ähnlichem Plan bearbeitete, umfassende Bibliographien fast ganz fehlen, auf die für die Grenzgebiete hätte verwiesen werden können. Aus diesem Grunde wurde z. B. im ersten, allgemeinen Teil die Methodik des Universitätsunterrichts in den einzelnen Disziplinen berücksichtigt, obgleich sie auch in den Spezialbibliographien dieser Fächer nicht fehlen darf; aus der ausgedehnten biographischen Literatur wurden wenigstens die als Quellen der Universitätsgeschichte besonders wichtigen Selbstbiographien verzeichnet, und der Mangel einer nach stoffgeschichtlichen Gesichtspunkten geordneten Bibliographie der deutschen poetischen Literatur veranlaßte zu dem schwierigen Versuch, auch die poetischen, satirischen und humoristischen Darstellungen des Universitätslebens zu sammeln.

Der voraussichtlich noch im Laufe dieses Jahres erscheinende 2. Teil wird die Literatur über die einzelnen Universitäten, die ehemaligen wie die noch in Deutschland bestehenden, enthalten, dazu die der deutsch-österreichischen, der deutsch-schweizerischen und die von Dorpat.

Ein Registerband, der dem 2. Bande möglichst bald folgen soll, wird alphabetisch geordnete Verfasser-, Titel- und Sachregister sowie einige Nachträge zu Teil 1 und 2 enthalten.

Der erste Teil zerfällt in 24 sachliche Hauptabteilungen und in 232 Unterabteilungen; im 2. Teil ist die Literatur über jede einzelne Universität, je nach ihrem Umfang in 10—20 sachlichen Unterabteilungen angeordnet. Innerhalb der letzten Unterabteilungen ist im allgemeinen chronologische Anordnung durchgeführt.

Hauptaufgabe des Werkes ist es, das für die Geschichtschreibung der deutschen Universitäten und des Studentenlebens vorhandene Material an Druckschriften möglichst vollständig zu verzeichnen und durch zweckmäßige Anordnung und erschöpfende Register bequem zugänglich zu machen; ferner soll die Bibliographie dienen als Hilfsmittel für den Betrieb der Bibliotheken, für Sammler und für Antiquare. Endlich dürfte sie sich auch als nützlich erweisen für den Gebrauch der Behörden, denen die Verwaltung und Leitung der Universitäten obliegt, für die Unterrichtsministerien sowie für die Kuratorien und Rektorate der einzelnen Universitäten.

19. Akademische Sitten und Gebräuche.

19, 1. Deposition.

12077. W[ilh.] **Fabricius,** Die Depositionslitteratur. (*Bibliographie derselben.*) *in:* Zeitschr. für Bücherfreunde. Jg. 3. 1899 bis 1900. Bd. 1. S. 99—105.

12078. Prooemium Depositoris Witebergensis, ut vocant, in ritu initiationis novorum Scholasticorum. (um 1527.) (*15 Verse. Anfang:* „Salvete spectatores humanissimi.") *in:* Phil. Melanthonis Opera. Vol. 10 = Corpus reformatorum. Vol. 10. Halis 1842. 4. Sp. 529—530.

12079. Jvdicium Philippi **Melanthonis,** de Depositione in Academiis usitata. (*Anfang:* .Nazianzenus narrat, sibi hoc Athenis contigisse".) *in Nr. 12104.*

12080. Dasselbe. *in dessen:* Opera omnia. Vol. 10 = Corpus reformatorum. Vol. 10. Halis Sax. 1842. 4. Sp. 97—99.

12081. Martin **Luther,** Von der Deposition. *in dessen:* Tischreden. *in:* Sämmtl. Werke. Frankf. u. Erl. 8. Bd. 62. 1854. S. 290—291.

12082. Mart. **Luther,** Depositionis ritus. *in dessen:* Colloquia, meditationes ... ed. Henr. Ern. Bindseil. Tom. 2. 1864. 8. p. 16.

12083. Iudicium Reverendi Patris D. Doctoris Martini **Lutheri** de depositione in academiis usitata. (*Anfang:* „Est haec praesens larva & depositio, mi puer".) *in: Nr. 12102. 12103. 12104.*

12084. Dasselbe. *in:* (Jodoci Willichii) physiologia crepitvs ventris, et risvs Iterato edita, a Rodolpho Goclenio. Cum Ritu Depositionis Scholasticae. Francof. 1607. 8. p. 125—128. *Bresl. U., Giessen.*

12085. Dasselbe. *in:* Casp. Dornavius, Amphitheatrum sapientiae ioco-seriae. Tom. 1. Hanoviae 1619. fol. p. 818. *Berl. K., Bresl. U.*

12086. Dasselbe. *in Nr. 12140—12142.* p. 26—29.

12087. Dimetri iambici in ritum Depositionis. (*Anfang:* „Salvete candidi hospites, Conviviumque sospites".) *in Nr. 12093 f. 12102—12104.*

12088. Dasselbe. *in:* (Jodoci Willichii) Physiologia crepitus ventris, et risus Iterato edita a Rodolpho Goclenio. Cum Ritu Depositionis Scholasticae. Francof. 1607. 8. p. 89—90. *Bresl. U., Giessen.*

12088a. Dasselbe. *in:* Casp. Dornavii Amphitheatrum sapientiae joco-seriae. T. 1. Hanoviae 1619. fol. p. 821—822.

12089. Dasselbe. *in:* Ren. **Moreau,** de versibus Leoninis. *in:* Georg. Chni Gebaueri anthologicarum diss. liber. Lips. 1733. 8. p. 361—62. (*nach Moreau hielt man Luther für den Verf.!*)

12090. Andr. Wilh. **Cramer,** Luther, (als Dichter „eines Burschenliedes für die Deposition eines Fuchses".) *in dessen:* Kleine Schriften. Leipz. 1837. 8. S. 205.

12091. Carmen de origine et significatione depositionis, quâ ivuentus in Gymnasijs initiatur. Academiae Vitebergensi dedicatum. Autore Luca **Schaubio,** eiusdem Academiae Depositore. (*Anfang:* „Cardine nuper equos Titan revehebat Eoo.") Witebergae. Anno. 1552. 4. 8 Bl. *Bresl. St.*

°12092. Chn. **Calenus** (Prof. der Med. in Greifsw.), Oratio de ritu depositionis. Gryphisw. 1569. (*Fabricius in Nr. 12077.*)

12093. Typvs de= ‖ positionis scho= ‖ lasticae, heroi= ‖ co carmine descri= ‖ ptus. ‖ Avtore ‖ Friderico **Wi= ‖ debrando.** ‖ Witebergae ‖ excvdebat Pe= ‖ trus Seitz. ‖ M.D.LXIX. 4. 6 Bl. *Titel in Einfassung.* (*Anfang:* „Ne gravis offensus nugis scurrilibus hospes.") *Bresl. St. u. U.*

12094. Typvs de= ‖ positionis scho= ‖ lasticae, heroico ‖ carmine descri= ‖ ptvs. ‖ Avtore ‖ Friderico **Wi= ‖ debrando.** ‖ Jenae ‖ Excusum, per Thomam Rebart. ‖ Anno M.D.LXXVII. ‖ 4. 6 Bl., Rücks. des letzten leer. *Jena.*

12095. Dasselbe. *in Nr. 12102, 12103, 12104.*

12096. Typus depositionis scholasticae, heroico carmine descriptus. Autore. Friderico **Widebrando.** Cum decem lepidissimis Bacchantium praedicamentis, decantatis â M. Johanne Fraxineo Gothano. Henricopoli, Per Haeredes Conr. Cornei. 1603. 4. 8 Bl. *Giessen.*

12097. Dasselbe. *in:* [Jodoci Willichii) Physiologia crepitus ventris, et risus Iterato edita a Rodolpho Goclenio. Cum Ritu Depositionis scholasticae. Francof. 1607. 8. S. 74—91. *Bresl. U., Giessen.*

12098. Dasselbe. *u. d. T.:* Frid. **Widebrami** [!] Depositio scholastica. *in:* Delitiae poetarum Germanorum ... Pars 6. Collectore A. F. G. G. Francof., Excud. Nic. Hoffmannus, sumptibus Jac. Fischeri. 1612. 8. S. 1098—1106. *Berl. K.*

12099. Dasselbe. („Widebrami") *in:* Casp. Dornavius, Amphitheatrum sapientiae ioco-seriae. Tom. 1. Hanoviae 1619. fol. p. 820—821. *Berl. K., Bresl. U.*

12100. Dasselbe. („Widebrami") *in:* Johannis-Henrici Alstedii Encyclopaedia.

Probe-Seite.

Inhaltsverzeichnis des I. Teiles.

		Seite
	Vorwort	V
1.	Bibliographie	1
2.	Sammlungen	1
3.	Universitäts-Schriften	15
4.	Wesen und Aufgabe der Universität	21
5.	Sitz der Universität	41
6.	Geschichte und Statistik	44
7.	Verfassung und Verwaltung	150
8.	Gerichtsbarkeit und Disziplin	176
9.	Akademische Ämter und Würden	187
10.	Fakultäten	192
11.	Universitätslehrer	201
12.	Universitätsbeamte	210
13.	Der Student als akademischer Bürger	211
14.	Dotierung und Ausstattung der Universität	233
15.	Ökonomische Verhältnisse der Universitätslehrer	245
16.	Die akademischen Grade	252
17.	Universitäts-Studium	287
18.	Universitätsstudium der einzelnen Wissenschaften	383
19.	Akademische Sitten und Gebräuche	572
20.	Studentenleben	579
21.	Verbindungen und Vereine	647
22.	Studentenlied	724
23.	Poetische, satirische, humoristische Darstellungen d. Universitätslebens	750
24.	Bildliche Darstellungen des Studentenlebens	826

Bestell-Zettel.

Bei .....

Buchhandlung in .....

bestelle ich ein Exemplar des im Verlage von B. G. Teubner in Leipzig soeben erschienenen Werkes [zur Ansicht]:

Bibliographie der deutschen Universitäten. Systematisch geordnetes Verzeichnis der bis Ende 1899 gedruckten Bücher und Aufsätze über das deutsche Universitätswesen. Im Auftrage des preußischen Unterrichtsministeriums bearbeitet von Wilhelm Erman und Ewald Horn.

Erster, allgemeiner Teil, unter Mitwirkung von E. Horn bearbeitet von W. Erman. [XX u. 836 S.] Lex.-8. 1904. geh. *M.* 30.—, geb. *M.* 36.—

Zweiter, spezieller Teil, unter Mitwirkung von W. Erman bearbeitet von E. Horn. (Unter der Presse.)

Dritter Teil, Register und Nachträge enthaltend, bearbeitet von W. Erman. (In Vorbereitung.)

Ort, Wohnung: Unterschrift:

.....

☞ Das nicht Gewünschte bitte gefl. durchzustreichen.

oder, wenn man die Parameter der schon pag. 538 berechneten Charakteristiken als Koordinaten x, y einführt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = [\varphi(x+y) + \psi(x-y)]\, u. \tag{34'}$$

Zur Integration derselben bieten sich zwei Methoden dar, von denen die eine mit der d'Alembert'schen, die andere mit der Bernoulli-schen Methode zusammenfällt, wenn man zu dem speziellen Falle $\varrho = \text{const.}$, $p = \text{const.}$ übergeht.

Bei der ersten Methode handelt es sich darum, die Green'sche Funktion im Sinne *Riemann's* herzustellen. *Wirtinger* bemerkt dabei[106]), dass die successiven Approximationen, welche die Existenz der Green-schen Funktion beweisen, im vorliegenden Falle so schnell konvergieren (von der Ordnung, in welcher die aufeinanderfolgenden Glieder der Bessel'schen Reihe abnehmen), dass sie auch zur numerischen Berechnung dienen können.

Bei der zweiten Methode geht man von geeigneten partikulären Integralen der Differentialgleichung aus. Der Umstand, dass ϱ nur von z und p nur von t abhängt, ermöglicht es, Gleichung (34) durch ein Produkt einer Funktion $y(z)$ von z und einer Funktion $s(t)$ von t allein zu integrieren. Diese Funktionen bestimmen sich durch die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + k^2 \varrho(z)\, y = 0, \quad \frac{d^2 s}{dt^2} + k^2 p\,(t)\, s = 0, \tag{35}$$

in denen k einen disponibeln Parameter bedeutet. Nimmt man ϱ und p als positive Funktionen an, was ja durch ihre physikalische Bedeutung nahe gelegt wird, so fallen die Gleichungen (35) in die Klasse der *Sturm'schen* (vgl. Art. II A 7a, Nr. 2). Es seien nun die Partikularlösungen y_1, y_2 bez. s_1, s_2 von (35) so bestimmt, dass für $z = 0$ $y_1 = 0$, $y_1' = 1$, $y_2 = 1$, $y_2' = 0$ bez. für $t = 0$ $s_1 = 0$, $s_1' = 1$, $s_2 = 1$, $s_2' = 0$ wird. In der Theorie der Sturm'schen Differentialgleichungen wird bewiesen, dass es eine unendliche diskrete Reihe von Parameterwerten $k_1, k_2, \ldots$ giebt, welche z. B. der Gleichung $y_1(l, k) = 0$ genügen. Bildet man daher unter Zugrundelegung irgend eines dieser „ausgezeichneten Parameterwerte" das Produkt

$$u_i = y_1(z, k_i)\,\{a_i\, s_1(t, k_i) + b_i\, s_2(t, k_i)\},$$

so hat man eine Partikularlösung von (35), welche der für die Enden der Saite ($z = 0$ und $z = l$) geltenden Bedingung ($u = 0$) genügt. Bildet man sodann eine unendliche Reihe aus solchen Partikular-

106) In der Fussn. 62) genannten Arbeit p. 374.

lösungen, so lässt sich diese zur Darstellung willkürlicher Funktionen verwenden (vgl. den folgenden Art.) und man kann die Koeffizienten a_i, b_i so wählen, dass $u = \sum u_i$ den für $t = 0$ vorgeschrieben Anfangsbedingungen entspricht. Die Lösung des Problems wird nach dieser Methode also durch eine Reihe gewonnen, welche in *beiden* Variabeln z und t den Charakter einer Sturm-Liouville'schen Reihe besitzt.

Wirtinger zeigt auch[62]), wie man durch Reihenentwickelung der Green'schen Funktion einerseits oder durch Summation der Sturm-Liouville'schen Reihe andrerseits von der einen zur anderen Methode übergehen kann.

In dem besonderen Falle $\varrho = \text{const.}$ oder $p = \text{const.}$ gehen nach den Differentialgleichungen (35) die Sturm'schen Funktionen y oder s in trigonometrische über und die Reihe wird in *einer* der beiden unabhängigen Variabeln vom Charakter der Fourier'schen. Setzt man gleichzeitig $\varrho = \text{const.}$ und $p = \text{const.}$ voraus, so wird die Reihe in *beiden* Variabeln eine Fourier'sche und man hat die Bernoulli'sche Lösung des elementaren Problems der schwingenden Saite.

14. Die Wärmeleitungsgleichung. Die Wärmeleitungsgleichung ist die einzige Gleichung von parabolischem Typus, welche genauer behandelt ist und auch bei dieser bezieht sich die Untersuchung nur auf diejenigen speziellen Gebiete, welche für die physikalische Anwendung Interesse haben, so dass über die allgemeine Form der bei dieser und überhaupt bei parabolischen Differentialgleichungen möglichen Randwertaufgabe nichts bekannt ist.

Es handle sich zunächst um die Wärmeleitung in einem linearen Leiter (bez. um einen Vorgang, der nur von *einer* räumlichen Koordinate x abhängt). Die Gleichung lautet dann

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{36}$$

wo t (bei passender Wahl der Einheit) die Zeit bedeutet. Das ausschliesslich betrachtete Gebiet in der (x, t)-Ebene besteht aus einem Streifen, der durch die Geraden $t = 0$, $x = 0$, $x = l$ begrenzt wird[107]). Auf dem Rande dieses Streifens sind die Werte von u vorgeschrieben.

---

107) Vgl. indessen *L. Saalschütz,* Astr. Nachr. Nr. 1321 (1861) § 12 ff. und *J. Stefan,* Wiener Ber. 98, 2a (1889), p. 473, 616, 965 und Wiener Monatshefte 1 (1889), wo das Gebiet von einem Stücke der x-Axe, von der positiven t-Axe und dem Parabelbogen $x = c\sqrt{t}$ begrenzt und auf der Begrenzung u vorgeschrieben wird. Dies Problem entspricht der Wärmeleitung in einer Wassersäule, die an schmelzendes Eis grenzt, wobei sich die Grenze x zwischen Wasser und Eis nach dem Gesetze $x = c\sqrt{t}$ fortschiebt.

Gesucht wird u im Innern des Streifens für $t > 0$. Die Aufgabe entspricht der Temperaturbestimmung in einem unendlich dünnen Stabe von der Länge l, für welchen die Anfangstemperatur in jedem Punkte und die Temperatur an den Enden für jede spätere Zeit gegeben ist, während die übrige Oberfläche des Stabes vor Wärmeabgabe geschützt wird. In dieser Aufgabe ist der Fall der Halbebene ($t > 0$) eingeschlossen, welcher der Wärmebewegung in einem beiderseits unendlich langen Stabe entspricht. Statt an den Endflächen die Temperatur direkt zu geben, kann man hier freie Ausstrahlung in einen Raum von der (ev. variabeln) Temperatur u_1 bez. u_2 vorschreiben, was nach dem *Newton*'schen Erkaltungsgesetz die Bedingungsgleichungen

$$(37)\quad \frac{\partial u}{\partial x} + h(u - u_1) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x} + h(u - u_2) = 0 \text{ (für } x = 0 \text{ und } x = l)$$

mit sich bringt. Auf noch eine andere Grenzbedingung wird man geführt, wenn man die Enden des Stabes $x = 0$ und $x = l$ zusammengebogen denkt, also die Wärmeleitung in einem Ringe untersucht; dann lautet die Grenzbedingung dahin, dass die Werte von u in je zwei gegenüberliegenden Punkten der Begrenzungsgeraden $x = 0$ und $x = l$ des vorher genannten Streifens übereinstimmen müssen: $u(0, t) = u(l, t)$. Das letztere Problem ist schon von *Fourier*[108]) gelöst; dabei treten die elliptischen ϑ-Funktionen zum ersten Mal in der Analysis auf. Desgleichen behandelt *Fourier*[109]) und vor ihm *Laplace*[110]) den Fall der Halbebene (Wärmebewegung in einem beiderseits unendlich langen Stabe). Eine Form der Lösung, welche *Fourier* hierfür angiebt, lautet

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi,$$

unter $F(\xi)$ die von $\xi = -\infty$ bis $\xi = +\infty$ willkürlich vorgeschriebene Anfangstemperatur verstanden. *Lord Kelvin*[111]) deutet dieselbe sehr anschaulich als Superposition unendlich vieler Einzelwirkungen, welche je von der Stelle ξ ausgehend nach dem Gesetze $(\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}$ räumlich und zeitlich fortgepflanzt werden.

Der Fall eines Stabes von endlicher Länge, welcher an seinen Endflächen frei ausstrahlt, wird von *Fourier* gelegentlich des dreidimensionalen Problems eines durch Ausstrahlung sich abkühlenden

108) Th. de la chaleur, chap. IV.
109) l. c. chap. IX, vgl. speziell art. 374.
110) J. éc. pol. cah. 15 (1809), p. 241.
111) Mathem. and Phys. Papers 2, art. 72, p. 41.

Würfels[112]) erledigt. Die Methode ist für *Fourier* und seine Nachfolger charakteristisch. *Fourier* beginnt mit einer Partikularlösung der Gleichung (36) von der Form: $a \cos kx\, e^{-k^2 t}$. In dieser wird k so gewählt, dass die Grenzbedingungen (37) (die bei *Fourier* l. c. übrigens etwas spezieller lauten) erfüllt sind. Es ergiebt sich für k eine transcendente Gleichung, von der bewiesen wird, dass sie unendlich viele reelle Wurzeln k_n besitzt: schliesslich ist noch der Nachweis erforderlich, dass eine willkürliche Funktion (die vorgeschriebene Anfangstemperatur) in eine trigonometrische Reihe von der Form $\sum a_n \cos k_n x$ entwickelt werden kann.

Um Aufgaben mit komplizierten auf solche mit einfacheren Randbedingungen zu reduzieren, leistet auch hier der Green'sche Satz[113]) und die Einführung einer Green'schen Funktion[114]) gute Dienste. Letztere ist so zu definieren, dass sie der zu (36) adjungierten Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ genügt, dass sie in einem willkürlichen Punkte ξ, τ unendlich wird wie $(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}}$ und ausserdem geeignete Randbedingungen erfüllt.

Über den funktionentheoretischen Charakter der Lösungen geben folgende Sätze einigen Aufschluss:

In dem Probleme des Ringes und des beiderseits unendlich ausgedehnten Stabes ist, wie auch der Anfangszustand $F(x)$ zur Zeit $t = 0$ beschaffen sein möge, die Lösung der Differentialgleichung für $t > 0$ eine analytische Funktion sowohl von x wie von t.[115]) Dagegen ist dieses für $t = 0$ auch in solchen Stellen x nicht notwendig der Fall, wo der Anfangszustand selbst als analytische Funktion gegeben ist. Ein Beispiel dafür giebt *S. Kowalewski*[116]) [nämlich $F(x) = \frac{1}{1-x}$ bei $x = 0$]. Hiermit hängt die von *Lord Kelvin*[117]) und *P. Appell*[118])

---

112) l. c. chap. VIII.

113) *B. Minnigerode*, Diss., Göttingen, 1862; *E. Betti*, Soc. Ital. Mem. (3) 1 (1867), p. 165.

114) *A. Sommerfeld*, Math. Ann. 45 (1894), p. 265.

115) *K. Weierstrass*, Berl. Ber. 1885², p. 633 u. 789. S. auch *H. Poincaré*, Th. anal. de la propagation de la chaleur, Paris 1895, chap. 5.

116) J. f. Math. 80 (1875), p. 22.

117) Cambridge Math. J. 4, Febr. 1844 = Math. phys. pap. 1 (Cambridge 1882), Art. 11, p. 39.

118) J. de math. (4) 8 (1892), p. 187. Die Appell'schen Resultate sind auf den Fall zweier und dreier räumlicher Koordinaten von *E. Lacour*, Toul. Ann. 9 (1895), p. 1 und *A. Boulanger*, Bull. soc. math. 25 (1897), p. 11, ausgedehnt worden.

behandelte Frage zusammen, ob ein gegebener Temperaturzustand $F(x)$ als Folge eines früheren angesehen werden kann. Dies ist im Allgemeinen nicht möglich. Eine notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung besagt, dass in diesem Fall $F(x)$ eine ganze transcendente Funktion von x sein muss. Verfolgt man irgend eine Lösung u der Wärmeleitungsgleichung der Zeit nach immer weiter rückwärts, so stösst man notwendig einmal auf eine Unendlichkeitsstelle, es sei denn, dass sich u auf eine Konstante reduziert.

Die den willkürlichen Funktionen in den oben genannten Problemen aufzuerlegenden Stetigkeitsbedingungen behandelt *A. Harnack*[119]).

Es ist vielfach[120]) bemerkt worden, dass, wenn man die Differentialgleichung durch Potenzreihen auflöst, in den Koëffizienten derselben zwei oder eine willkürliche (in diesem Falle natürlich analytisch zu wählende) Funktion auftreten, je nachdem man die Reihe nach Potenzen von x oder von t ordnet. Der Grund hiervon liegt in dem parabolischen Charakter der Differentialgleichung.

Das allgemeine Problem der Wärmeleitung, welches bei einem beliebigen dreidimensionalen räumlichen Gebiet R auftritt und welches auch als „Fourier'sches Problem" bezeichnet wird, ist folgendes: Gesucht wird diejenige Lösung u der Wärmeleitungsgleichung, welche für $t = 0$ im Innern von R in eine willkürlich vorgeschriebene Funktion des Ortes übergeht und für $t > 0$ auf der Oberfläche von R der Bedingungsgleichung der freien Ausstrahlung $\frac{\partial u}{\partial n} + hu = 0$ genügt.

Die von *Fourier* selbst (wenn auch zum Teil nicht in voller Allgemeinheit) behandelten Gebiete sind[121]) die Kugel, der Kreiscylinder, das rechtwinklige Parallelepipedon. Von *G. Lamé*[122]) wurden einige ebenflächig begrenzte Gebiete hinzugefügt, welche sich durch besondere geometrische Symmetrie auszeichnen.

Ganz allgemein fasst *H. Poincaré*[123]) das Fourier'sche Problem an. Seine Lösung gilt für ein beliebiges dreidimensionales (als endlich vorausgesetztes) Gebiet R und wird in den soeben genannten speziellen Fällen mit den von den älteren Autoren gefundenen Lösungen

---

119) Ztschr. Math. Phys. 32 (1887), p. 91.

120) *Poisson*, J. éc. polyt. cah. 13, p. 110; *Fourier*, l. c. art. 399; *P. du Bois-Reymond*, Beitr. p. 211; *Le Roux*, Darb. Bull. (2) 19, p. 127.

121) l. c. chap. V—VIII. Das Fourier'sche Verfahren lässt sich ohne erhebliche Schwierigkeit auf alle in Nr. 9 (Schluss) genannten Gebiete übertragen.

122) Théorie de la chaleur, Paris, 1861.

123) Amer. J. of math. 12 (1890), p. 211 = Th. anal. de la propagat. de la chaleur, Paris 1895, chap. 15 ff. und namentlich Pal. Rend. 8 (1894), p. 57.

identisch. Sie lehrt daher nicht nur die Existenz, sondern auch in jedem Falle die geeignetste Berechnungsweise der Lösung kennen.

Poincaré stützt sich auf die Existenz der ausgezeichneten Lösungen der Differentialgleichung $\Delta U + k^2 U = 0$ für das in Rede stehende Gebiet. Da diese einstweilen nur unter der besonderen Randbedingung $U = 0$ vollständig bewiesen ist (vgl. pag. 549), so ist auch die Poincaré'sche Lösung des Fourier'schen Problems nur in dem Falle lückenlos, wo als Randbedingung $u = 0$ vorgeschrieben, wo also in der allgemeineren Bedingung der freien Ausstrahlung h gleich ∞ genommen wird.

Es werde nun die im Innern des Gebietes vorgeschriebene Anfangstemperatur u_0 in eine Reihe nach den ausgezeichneten Lösungen $U_1, U_2, \ldots$ des Gebietes R entwickelt:

$$u_0 = A_1 U_1 + A_2 U_2 + \cdots.$$

Die Koëffizienten bestimmen sich dabei durch die Formel

$$A_n = \int u_0 U_n d\tau.$$

Welche Voraussetzungen über die Funktion u_0 zu machen sind, damit die Möglichkeit und die Konvergenz dieser Entwickelung bewiesen werden kann, wird im folgenden Artikel erörtert werden.

Die Poincaré'sche Lösung des Fourier'schen Problems lautet dann einfach:

$$u = A_1 U_1 e^{-k_1^2 t} + A_2 U_2 e^{-k_2^2 t} + \cdots;$$

sie stellt ganz im Sinne *Fourier's* die gesamte Wärmebewegung als Überlagerung einer unendlichen Reihe von Partialbewegungen dar, deren jede wesentlich durch die geometrische Beschaffenheit des Gebietes bestimmt ist.

Von *Poincaré* weicht *Éd. Le Roy*[124]) in seiner schon mehrfach genannten Behandlung der Wärmeleitungsgleichung insofern ab, als er die Möglichkeit der Lösung direkt durch die Auskehrungsmethode beweist und die Entwickelung nach ausgezeichneten Lösungen nur zur Formulierung der Schlussresultate benutzt. Er umgeht auf diese Weise gewisse Schwierigkeiten des Poincaré'schen Verfahrens.

15. Schlussbemerkungen betr. die Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung und mehr als zwei unabhängigen Variabeln. Den ersten Schritt zur Kenntnis solcher Differentialgleichungen bildet die Übertragung des Charakteristikenbegriffes.

124) Ann. éc. norm. (3) 15 (1898), troisième partie, p. 107.

Die Differentialgleichung sei

$$A_0\frac{\partial^p u}{\partial x^p}+A_1\frac{\partial^p u}{\partial x^{p-1}\partial y}+\cdots+A_p\frac{\partial^p u}{\partial y^p}=F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\cdots\frac{\partial^{p-1}u}{\partial y^{p-1}}\right).$$

Die Gleichung der Charakteristiken lautet dann nach *Monge*[125])

$$A_0dy^p-A_1dy^{p-1}dx+\cdots+(-1)^pA_pdx^p=0.$$

Durch jeden Punkt der x, y-Ebene gehen p reelle oder imaginäre, verschiedene oder teilweise zusammenfallende Charakteristiken. Dementsprechend wird man von einem *rein elliptischen Typus*, von einem *rein hyperbolischen* und *parabolischen Typus* sprechen, je nachdem *alle* p Charakteristiken imaginär, reell verschieden oder zusammenfallend sind. Ausserdem werden sich alle *möglichen Zwischentypen* ergeben.

Eine hyperbolisch-parabolische Gleichung ist z. B. die folgende:

$$\frac{\partial^p u}{\partial x^n\partial y^m}=\sum A_{ik}\frac{\partial^{i+k}u}{\partial x^i\partial y^k},\qquad \begin{matrix} n+m=p,\\ i=1,2,\ldots,p-1,\\ k=1,2,\ldots,p-i-1.\end{matrix} \tag{38}$$

Ihre p Charakteristiken sind sämtlich reell; n derselben fallen in die x-, m in die y-Richtung. Auf diese Gleichung dehnt *Ét. Delassus*[126]) die Riemann'sche Integrationsmethode der hyperbolischen Differentialgleichungen (s. Nr. 3) aus. Die Green'sche Funktion $G(x, y; \xi, \eta)$, auf deren Berechnung die Lösung von (38) bei vorgeschriebenen Werten von $u, \frac{\partial u}{\partial n}, \cdots\frac{\partial u^{p-1}}{\partial n^{p-1}}$ längs eines beliebigen, keine Charakteristik berührenden Kurvenstückes zurückgeführt werden kann, genügt den folgenden Bedingungen: Sie ist eine Lösung der zu (38) adjungierten Gleichung und sie befriedigt längs der Charakteristik $x=\xi$ bez. $y=\eta$ n bez. m Bedingungsgleichungen zwischen den Werten der Funktion und ihren $p-1$ ersten Differentialquotienten. Der Vertauschungssatz von p. 519 tritt auch hier in Kraft. Die Existenz der Green'schen Funktion folgt aus ihrer Darstellung durch successive Approximationen.

Über den funktionentheoretischen Charakter der Lösungen von Differentialgleichungen mit lauter reellen Charakteristiken wurde schon p. 537 im Anschluss an die Arbeiten von *Ét. Delassus* und *J. Le Roux* berichtet.

---

125) Appl. § XXI, 5.

126) Ann. éc. norm. (3) 12 (1895), Suppl. Vgl. auch Par. C. R. 117 (1893), p. 510.

Den anderen äussersten Fall bilden die Differentialgleichungen mit lauter imaginären Charakteristiken, welche selbstverständlich von gerader Ordnung sein müssen. Eine allgemeine Theorie derselben steht noch gänzlich aus (vgl. indessen ein p. 534 genanntes Resultat von *E. Picard*). Nur einige spezielle Fragen bei speziellen Gleichungen dieser Art sind hier zu erwähnen.

Als einfachste Gleichung höherer Ordnung bietet sich $\Delta\Delta u = 0$ oder allgemeiner $(\Delta)^n u = 0$ dar. Erstere Gleichung tritt zuerst bei *E. Mathieu*[127]) im Anschluss an ein Problem der Elastizitätstheorie auf. Eine Darstellung derjenigen Funktionen, welche dem Newtonschen Potentiale $1/r$ entsprechen, giebt *A. Gutzmer*[128]). *T. Levi-Cività*[129]) behandelt die Transformationen der Gleichung in sich (Inversion der unabhängigen, verbunden mit einer multiplikativen Änderung der abhängigen Variabeln) und führt die Randwertaufgabe für ein beliebiges Gebiet auf unendliche Determinanten (I A 3, Nr. 58) zurück[132]). Hieran schliessen an *V. Volterra*[129a]), *E. Almansi*[129b]) und *T. Boggio*[129c]). Den Satz über die Vertauschbarkeit von Pol und Aufpunkt bei den Green'schen Funktionen dieser Gleichung beweist *T. Boggio*[130]).

Einige Randwertaufgaben für spezielle Gebiete (Kreis, Kreisring etc.) lösen *G. Lauricella*[131]), *F. d'Arcais*[132]), *E. Almansi*[132]), *T. Levi-Cività*[132]), *V. Volterra*[132]).

In allen behandelten Fällen zeigt es sich, dass man bei der Differentialgleichung $\Delta\Delta u = 0$ auf der Grenze eines geschlossenen Gebietes u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ willkürlich vorschreiben kann. Dasselbe wird im allgemeinen von einer beliebigen Differentialgleichung vierter Ordnung von durchaus elliptischem Typus gelten. Ebenso kann man bei der Gleichung $\Delta^n u = 0$ sowie aller Voraussicht nach bei einer beliebigen durchaus elliptischen Differentialgleichung der $2n^{\text{ten}}$ Ordnung ausser u die $n - 1$ ersten normalen Ableitungen auf der Begrenzung des Gebietes im allgemeinen willkürlich wählen und alsdann eine im Innern des Gebietes eindeutige und stetige Lösung finden, welche

127) J. de math. (2) 14 (1869).
128) J. de math. (4) 6 (1890), p. 405 und Diss. Halle 1893.
129) Ven. Atti (7) 9 (1897—98), p. 1399.
129a) Ven. Atti 57 (1899).
129b) Ann. di mat. (3) 2 (1899), p. 1.
129c) Ven. Atti 59 (1900), p. 497.
130) Tor. Atti 35 (1900).
131) Tor. Atti 31 (1896), p. 1010.
132) Ibid. 33 (1898), passim.

auf der Begrenzung den vorgeschriebenen Bedingungen genügt. Durch den Zusatz „im allgemeinen“ soll dabei angedeutet werden, dass es (vgl. Nr. **10**) unter Umständen gewisse kritische Gebiete geben wird, für welche die allgemeine Regel für die Möglichkeit der angegebenen Randwertaufgabe eine Ausnahme erleidet.

Die allgemeine lineare Differentialgleichung vierter Ordnung von elliptischem Typus mit konstanten Koeffizienten wird von *C. Somigliana*[133]) untersucht. Dieselbe lässt sich durch lineare Transformation der unabhängigen Variabeln stets in die Form setzen:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 6m \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0.$$

Ein spezielles Integral dieser Gleichung, welches mit einer logarithmischen Unstetigkeit behaftet ist, ermöglicht die Darstellung einer beliebigen stetigen Lösung für ein gegebenes Gebiet durch ein Randintegral im Sinne der Gleichung (9).

Differentialgleichungen mit drei unabhängigen Variabeln sind in der mathematischen Physik die Regel; insofern in diesen die höchsten Differentialquotienten in der Verbindung des zweiten Differentialparameters Δu vorkommen, sind sie denselben Methoden zugänglich, wie die Gleichungen mit zwei unabhängigen Variabeln (vgl. p. 528 und p. 548). Allgemein wird man bei drei unabhängigen Variabeln statt der Charakteristiken oder „charakteristischen Linien“ „charakteristische Flächen“ haben, welche z. B. bei der linearen Differentialgleichung p^{ter} Ordnung:

$$\sum A_{ijk} \frac{\partial^{i+j+k} u}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} = 0 \qquad (i + j + k \leq p)$$

gegeben sind durch die partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\sum A_{ijk} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^i \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^j \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^k = 0$$

und die Gleichung haben $F(x, y, z) = \text{const.}$

Diese Flächen können wieder reell oder imaginär sein und man kann dementsprechend Gleichungen vom elliptischen, hyperbolischen oder allgemeiner vom elliptisch-hyperbolischen Typus unterscheiden.

Ein Gegensatz zu dem Falle zweier unabhängiger Variabler rührt davon her, dass die Charakteristikengleichung im allgemeinen nicht mehr in Linearfaktoren zerlegbar sein wird, sodass man im allgemeinen garnicht von n unterschiedenen Scharen von Charakteristikenflächen

133) Ann. di mat. (2) 18 (1890), p. 59. Entsprechende Ausführungen desselben Verf. für eine elliptische Differentialgleichung beliebiger Ordnung mit konstanten Koeffizienten finden sich l. c. 22 (1894), p. 143, § 2.

sprechen kann. Mit denjenigen besonderen Gleichungen, wo diese Zerlegung möglich und im Reellen möglich ist, beschäftigt sich *Ét. Delassus*[12]). Zu derselben Kategorie gehören diejenigen Gleichungen, auf welche *L. Bianchi*[134]) und in allgemeinster Weise *O. Niccoletti*[135]) die Riemann'sche Integrationsmethode ausdehnen und für welche sie die Möglichkeit der p. 512 aufgeführten, entsprechend modifizierten Randwertaufgaben beweisen.

Nicht zerlegbar ist die Charakteristikengleichung z. B. im Falle der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$, welche von *V. Volterra*[136]) hinsichtlich ihrer Charakteristikeneigenschaften studiert ist. Werden x, y und t als räumliche rechtwinklige Koordinaten gedeutet, so sind die Charakteristikenflächen Rotationskegel von dem Öffnungswinkel 2 arc tg a mit einer der t-Richtung parallelen Achse. Die Bedeutung derselben für die Integration der Differentialgleichung ergiebt sich z. B. aus folgendem Satze, dessen Analogon für zwei unabhängige Variable p. 512 ausgesprochen ist: Wenn auf einem Flächenstücke σ des Raumes (x, y, t) die Werte von u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ willkürlich gegeben sind, so lässt sich der Wert von u in jedem Punkte x, y, t bestimmen, welcher zur Spitze eines Charakteristikenkegels genommen werden kann, der aus σ ein durch den Kegel vollständig begrenztes Gebiet ausschneidet.

134) Linc. Rend. (5) 4^1 (1895), p. 1.
135) Nap. Atti (2^a) 8 (1895), Nr. 2.
136) Acta math. 18 (1894), p. 161.

(Abgeschlossen im April 1900.)

Nachtrag. Der Existenzbeweis für die p. 515 postulierte Lösung $v = U \log r + V$ bei einer beliebigen linearen Differentialgleichung von elliptischem Typus mit analytischen Koeffizienten ist dem Ref. inzwischen von *D. Hilbert* mitgeteilt worden. Die Funktionen U und V werden dabei als Potenzreihen in x und y dargestellt, U genügt der homogenen Gleichung $M(U) = 0$ (s. p. 515), V derselben Gleichung mit geeignetem zweiten Gliede. Näheres s. bei *E. R. Hedrick*, Diss. Göttingen 1901. Der p. 534 oben angegebene Weg zum Nachweis des analytischen Charakters der Lösungen einer linearen elliptischen Differentialgleichung ist hiernach allgemein gangbar. Auch die Existenz der p. 516 postulierten Green'schen Funktionen ist, die Lösbarkeit der gewöhnlichen Randwertaufgabe vorausgesetzt, erwiesen.

II A 8. VARIATIONSRECHNUNG

VON

ADOLF KNESER

IN BERLIN.

Inhaltsübersicht.

Ständige Bezeichnungen:

$$J_n = \int_a^b f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\, dx, \quad U_n = \int_a^b f(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')\, dx;$$

für U_n ist m die Anzahl der Bedingungsdifferentialgleichungen.

1. Begriff der Variationsrechnung.
2. Infinitesimalbetrachtungen von *Euler*.
3. Einführung des Zeichens δ durch *Lagrange*.
4. Allgemeine Variationsformel von *Euler*; reine und gemischte Variationen.
5. Spezielle Variation durch Änderung eines Parameters.
6. Notwendige Bedingung für $\delta J_n = 0$.
7. Theorie der Integrabilität.
8. *Euler*'s Multiplikatormethode für $\delta U_2 = 0$, $m = 1$.
9. Der Multiplikator bei isoperimetrischen Aufgaben.
10. Die Multiplikatoren und notwendige Bedingungen für $\delta U_n = 0$.
11. Formale Entwicklungen; *Jacobi-Hamilton*'sche Methode.
12. Zweite Variation von J_1 nach *Legendre*.
13. Transformation von $\delta^2 J_n$ nach *Jacobi*.
14. Beweis der formalen Sätze von *Jacobi* durch *Hesse* und *Frobenius*.
15. Transformation von $\delta^2 U_n$ nach *Spitzer, Clebsch, Mayer, Lipschitz*.
16. Das Vorzeichen von $\delta^2 U_n$ nach *Mayer*; konjugierte Punkte.
17. Die auf konjugierte Punkte bezügliche notwendige Bedingung des Extremums von J_1 nach *Erdmann*.
18. *Scheeffer*'s neue Methode; Ausdehnung des Satzes von *Erdmann*.
19. Kritische Untersuchungen; Begriff der Variation.
20. Hinreichende Bedingungen des Extremums von J_1 nach *Scheeffer*.
21. Hinreichende Bedingungen nach *Weierstrass*; das isoperimetrische Problem im engeren Sinne.
22. Höhere Variationen; hinreichende Bedingungen bei variablen Grenzen.
23. *Steiner*'s Sätze über Figuren extremen Flächeninhalts; diskontinuierliche Lösungen.
24. Mehrfache Integrale; Transformation der ersten Variation.
25. Zweite Variation und hinreichende Bedingungen des Extremums von Doppelintegralen.
26. Übersicht der Beispiele und Anwendungen.

Lehrbücher.

L. Euler, Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti, Lausanne und Genf 1744. Teilweise übersetzt von *P. Stäckel*, Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 46, Leipzig 1894.

J. H. Jellett, An elementary treatise on the calculus of variations. Dublin 1850, deutsch von *C. H. Schnuse*, Braunschweig 1860.

L. Stegmann, Lehrbuch der Variationsrechnung und ihrer Anwendung bei Untersuchungen über das Maximum und Minimum, Cassel 1854.

F. Moigno, *L. Lindelöf*, Leçons sur le calcul différentiel et intégral, 4, Calcul des variations, Paris 1861.

J. Dienger, Grundriss der Variationsrechnung, Braunschweig 1867.

Carll, A treatise on the calculus of variations, New York und London 1885.

J. Sabinin, Kursus der Variationsrechnung (russisch), Moskau 1893.

E. Pascal, Calcolo delle variazioni e calcolo delle differenze finite, Mailand 1897. (Hauptsächlich referierend, mit reichhaltigen Litteraturangaben.) Übersetzung Leipzig 1899.

A. Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung, Braunschweig 1900. Der Inhalt dieses Werkes ist im folgenden nicht berücksichtigt.

Unter den Lehrbüchern der Analysis, welche die Variationsrechnung behandeln, seien die von *Sturm* (2), *Serret* (2), *Jordan* (3) hervorgehoben; vgl. ferner Encyclopaedia britannica, Art. Infinitesimal calculus. Ältere hier nicht erwähnte Lehrbücher citieren *Pascal* und *Todhunter* (s. u.).

Geschichte: *F. Giesel*, Geschichte der Variationsrechnung (erster Theil), Torgau 1857 (bis zu *Lagrange*).

J. Todhunter, A history of the progress of the calculus of variations during the nineteenth century, Cambridge und London 1861. (Ausführliche Referate der wichtigsten Arbeiten bis zu *Hesse*.)

G. Eneström, Framställning af striden om isoperimetriska problemet, Upsala 1876 (Upsala universitets Årsskrift).

P. Stäckel, Anmerkungen zu Übersetzungen in Ostwald's Klassikern der exakten Wissenschaften, Nr. 46, 47, Leipzig 1894.

M. Cantor, Geschichte der Mathematik, 3, Leipzig 1899.

---

1. Begriff der Variationsrechnung. Während die Differentialrechnung auf die Änderungen einer Grösse achtet, welche durch kleine Wertänderungen einzelner sie bestimmender Variabeln hervorgerufen werden, ist die Variationsrechnung die Lehre von den Änderungen solcher Grössen, deren Wert von veränderlichen funktionalen Verhältnissen abhängt, bei kleinen Abänderungen dieser Verhältnisse, und die hierdurch bestimmten Inkremente der abhängigen Grösse heissen *Variationen*. Unter einer kleinen Abänderung eines funktionalen Zusammenhangs zwischen irgend welchen Veränderlichen verstehen wir die Herstellung eines neuen Zusammenhangs von der Be-

schaffenheit, dass jedem bei der ursprünglichen Abhängigkeit möglichen Wertsystem ein bei der neuen mögliches, welches von jenem nur wenig abweicht, entspricht, und dass dieses Entsprechen eindeutig umkehrbar ist. Für entsprechende Wertsysteme werden die entsprechend gebildeten Differentialquotienten der Veränderlichen bis zu einer gewissen Ordnung hinauf in beiden funktionalen Verhältnissen nur wenig von einander abweichen; wie gross jene Ordnung ist, ist Sache der Definition, sodass verschiedene Festsetzungen hierüber dem Begriff der Variation verschiedenen Inhalt geben. (Nr. **19**).

Die hauptsächlichste Anwendung der Variationsrechnung, welche bisweilen geradezu als ihr Gegenstand bezeichnet wird, ist die Lösung der Aufgabe, eine Grösse, deren Werth von veränderlichen funktionalen Verhältnissen abhängt, durch bestimmte Verfügung über diese zu einem Extremum, d. h. zu einem Maximum oder Minimum zu machen.

2. Infinitesimalbetrachtungen von Euler. Eine allgemeine Methode zur Behandlung derartiger Extremumsaufgaben giebt *L. Euler* in seinem grundlegenden Werke, nachdem von *J. Newton, Joh. I. Bernoulli, Jac. I. Bernoulli* und *Euler* selbst einzelne hierher gehörige Probleme gelöst waren. Soll das Integral

$$J_n = \int_a^b f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) dx,$$

in welchem a und b gegeben, f eine bekannte Funktion seiner Argumente und y eine unbekannte Funktion von x ist, durch passende Wahl von y ein Extremum werden, so bildet *Euler*[1]) eine spezielle Variation von y, indem er y für einen bestimmten Wert von x durch $y + \varepsilon$, gleichzeitig das Integral J und die Ableitungen $y^{(\nu)}$ durch die endliche Summe und die Differenzquotienten, deren Grenzwerte sie sind, ersetzt. Er erhält dann als Zuwachs des Integrals J_n:

$$\varepsilon \Delta x \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y''} - \cdots \right\} = \varepsilon \Delta x \cdot M,$$

wobei Δx die konstante Differenz zweier aufeinanderfolgender Werte von x bei der Bildung der bezeichneten Annäherungswerte bedeutet. *Euler* schliesst hieraus, dass die Differentialgleichung $M = 0$ eine notwendige Bedingung für das Extremum des Integrals J_n ist. Die Schwäche seiner Argumentation liegt in der Vertauschung der Grenzübergänge $\lim \varepsilon = 0$ und $\lim \Delta x = 0$.

---

1) Meth. inv. Kap. 1, § 53, p. 26; Kap. 2, § 56, p. 71.

3. Einführung des Zeichens δ durch Lagrange. *J. L. Lagrange*[2]) betrachtet zuerst Variationen von allgemeiner Natur. Es sei Z irgend eine Grösse, welche aus $x, y, z, dx, dy, dz, d^2x, \ldots$ in gegebener Weise zusammengesetzt ist, wobei *Lagrange* implicite annimmt, dass zwischen x, y, z zwei endliche Gleichungen bestehen, also eine einfache Mannigfaltigkeit von Werthsystemen (x, y, z) vorliegt; den Fortgang längs dieser bezeichnen die Differentiale d. Wird dieselbe unendlich wenig abgeändert, so erhalte Z den Zuwachs δZ. *Lagrange* setzt als leicht ersichtlich die Gleichungen

$$d\delta Z = \delta dZ, \quad \delta \int Z = \int \delta Z \tag{1}$$

an; aus ihnen folgt, wenn u irgend eine in Z vorkommende Grösse ist,

$$\int Z d\delta u = Z\delta u - \int \delta u \cdot dZ, \tag{2}$$

sodass man jede unter dem Integralzeichen auftretende Variation eines Differentials durch partielle Integration wegschaffen und speziell setzen kann

$$\delta \int Z = M + \int (P\delta x + Q\delta y + R\delta z);$$

dabei hängt M nur von den Werten der Variationen und ihrer Differentiale an den Integrationsgrenzen ab, P, Q, R aber enthalten keine Variationen und sind der Identität

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0 \tag{3}$$

unterworfen[3]). Soll nun $\int Z$ durch passende Bestimmung des Zusammenhangs zwischen x, y, z zu einem Extremum werden, so schliesst *Lagrange* aus der Unabhängigkeit der Variationen von x, y, z, dass die Gleichungen

$$M = 0, \quad P = Q = R = 0$$

bestehen müssen, von denen die letzten drei sich nach (3) auf zwei Differentialgleichungen reduzieren, welche y und z als Funktionen von x bestimmen, während die erste Gleichung eine Beschränkung für die Werte der x, y, z und ihrer Differentiale an den Integrationsgrenzen ausdrückt.

Lagrange hat in seiner zweiten Abhandlung[4]) diese Betrachtungen

2) Misc. Taur. 2^3, p. 173 (1762). Oeuvres 1, p. 335. Übers. von *Stäckel*, Ostwald's Klass. Nr. 47. Zeitlich geht vorher eine briefliche Mitteilung an *Euler*, s. *Cantor*, Zeitschr. Math. Phys. (2) 23, Hist.-lit. Abt. p. 1. *Lagrange*, Oeuvres 14.

3) Oeuvres 1, p. 347.

4) Misc. Taur. 4^2 (1771), p. 163. Oeuvres 2, p. 37. Übers. von *Stäckel* a. a. O.

auf den Fall einer einfachen Mannigfaltigkeit im Gebiet beliebig vieler Variablen ausgedehnt und dabei zugelassen, dass der Integrand auch von den Integrationsgrenzen abhänge, und für die Grenzwerte der Variablen und ihrer Differentiale irgend welche Relationen vorgeschrieben sind.

4. Allgemeine Variationsformel von Euler; reine und gemischte Variationen. *Euler* hebt im Anschluss an die Arbeiten von *Lagrange* hervor[5]), dass wenn eine Kurve als Variation der andern betrachtet werden soll, beide punktweise eindeutig auf einander bezogen werden müssen. Die erste Formel (1) leitet er dann aus der Betrachtung ab, dass wenn Z und $Z+dZ$ die Werte von Z in zwei benachbarten Punkten A und B der ursprünglichen Kurve sind, in den entsprechenden Punkten A' und B' der variierten Kurve die variierten Grössen $Z+\delta Z$, $Z+dZ+\delta(Z+dZ)$ erhalten werden. Andrerseits vermehrt der direkte Übergang von A' zu B' die Grösse $Z+\delta Z$ um ihr Differential, sodass

$$Z+dZ+\delta(Z+dZ)=Z+\delta Z+d(Z+\delta Z)$$

und damit die erste Gleichung (1) resultiert; die zweite folgt aus dem Begriff der Variation sofort[6]). Aus diesen Grundeigenschaften der Variation schliesst *Euler*:

$$\delta y'=\frac{d\delta y}{dx}-y'\frac{d\delta x}{dx},\qquad \delta y''=\frac{d\delta y'}{dx}-y''\frac{d\delta x}{dx},\ldots$$

und, wenn

$$\omega=\delta y-y'\delta x,\quad w=\delta z-z'\delta x$$

gesetzt wird,

$$\delta y^{(\nu)}-y^{(\nu+1)}\delta x=\omega^{(\nu)},\quad \delta z^{(\nu)}-z^{(\nu+1)}\delta x=w^{(\nu)}.$$

Ist ferner f irgend eine Funktion von x, y, y', y'', …, z, z', z'', …, so ergiebt sich durch partielle Integration nach Formel (2):

$$(4)\quad \delta\int_a^b f\,dx=\int_a^b(M\omega+Nw)dx+\Big[f\delta x+\sum_{\nu=0,1,\ldots}(R_\nu\omega^{(\nu)}+S_\nu w^{(\nu)})\Big]_a^b,$$

wobei

$$M=\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}+\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y''}-\cdots,$$

$$R_\nu=\frac{\partial f}{\partial y^{(\nu+1)}}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y^{(\nu+2)}}+\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y^{(\nu+3)}}-\cdots$$

5) Inst. cal. integralis (ed. II, Petrop. 1793), 3, Appendix § 13, 14, p. 387; § 42, p. 399.

6) A. a. O. § 37, 75, p. 397, 416.

7) A. a. O. § 86, p. 423.

gesetzt ist, und N, S_r aus diesen Ausdrücken hervorgehen, indem man y durch z ersetzt. *S. Poisson*[8]) fügt auf der rechten Seite der Gleichung (4), einen Gedanken von *Lagrange* (Nr. 3) aufnehmend, die Glieder

$$\delta a \int_a^b \frac{\partial f}{\partial a}\, dx + \delta b \int_a^b \frac{\partial f}{\partial b}\, dx$$

hinzu. Die Verallgemeinerung für den Fall beliebig vieler unbekannter Funktionen von x liegt auf der Hand.

Die Grösse ω ist, wie *Poisson*[9]) bemerkt, der Zuwachs, den y erfährt, wenn man mit konstantem x von der ursprünglichen zur varriierten Kurve übergeht; sie wird bisweilen[10]) als „reine" Variation von der „gemischten" δy, bei welcher x zugleich variiert, unterschieden. Variiert man also so, dass $\delta x = 0$, so hat man $\omega = \delta y$ und

$$\delta y' = \frac{d\delta y}{dx},$$

d. h. das Zeichen der Variation ist mit dem des Differentialquotienten vertauschbar, wenn die Variable, nach der man differenziert, unvariiert bleibt. Im folgenden bis Nr. **20** einschliesslich ist nur von „reinen" Variationen die Rede.

5. Spezielle Variation durch Änderung eines Parameters. In einer den oben erwähnten nachfolgenden Abhandlung[11]) hat *Euler* die Variation nicht als neuen Begriff dem Differential zur Seite gestellt, sondern als Spezialfall des letzteren zu begreifen gesucht, indem er annimmt, dass der Übergang von einer Kurve zu einer benachbarten bewirkt wird durch Änderung eines Parameters t, der in die Gleichung der Kurve eingeht; entspricht diese dem Wert $t = t_0$, so setzt *Euler*

$$\delta y = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=t_0} dt,$$

und erreicht hierdurch, dass die formalen Grundeigenschaften des Zeichens δ sofort als bekannte Eigenschaften des Differentials erscheinen. Dass hiermit der Begriff der Variation spezialisiert wird, hat *Euler* gewusst[12]); diese Spezialisierung ist unschädlich, solange es sich um Herleitung notwendiger Bedingungen des Extremums

8) Par. Mém. 12 (1832), p. 236.
9) Fussn. 8 p. 241.
10) *Stegmann* § 56, p. 281.
11) Petrop. N. Comm. 16 (1772), p. 35; Inst. calc. int. 4, suppl. XI.
12) Petrop. N. Comm. 10 (1766), p. 55.

handelt, hat aber vielfach mangelhafte Schlussweisen verschuldet, wo man sie bei der Herleitung hinreichender Bedingungen festhielt (Nr. **19**). *Lagrange* benützt dieselbe in der Funktionsrechnung[13]) durchgehends und so ist sie in die Mehrzahl der späteren Lehrbücher übergegangen. In der Theorie der analytischen Funktionen[14]), wo er sich mit hinreichenden Bedingungen beschäftigt (Nr. **12**), arbeitet *Lagrange* dagegen mit dem allgemeinen Begriff der Variation.

6. Notwendige Bedingung für $\delta J_n = 0$. Variiert man so, dass an den Grenzen die Grösse δy nebst einer angemessenen Anzahl ihrer Ableitungen verschwindet, so folgt aus der Formel (4) die speziellere:

$$\delta J_n = \int_a^b M \delta y \, dx,$$

aus welcher als notwendige Bedingung des Extremums (vgl. Nr. **2**) die Gleichung

$$M = 0 \tag{5}$$

folgt. Eine genauere Begründung dieses Schlusses beginnt *Lagrange*[15]), indem er y in J_n durch $y + \varepsilon u$ ersetzt, und ε eine kleine Konstante, u eine Funktion von x sein lässt; die erste Variation ist dann der Inbegriff der in ε linearen Glieder, wenn man nach Potenzen von ε entwickelt. Der Zuwachs von J_n kann daher positiv und negativ, J_n also kein Extremum sein, wenn nicht δJ_n verschwindet. Dass hieraus bei der für δy vorliegenden Willkürlichkeit auf (5) geschlossen werden kann, ist oft, z. B. noch von *Moigno-Lindelöf*, als selbstverständlich angesehen. Eine formale Ableitung dieses Resultats versucht schon *Lagrange*[15]). Einen im Grunde ausreichenden Beweis giebt *Stegemann*[16]); für den Fall, dass M im ganzen Integrationsintervall nicht verschwindet, setzt er:

$$\delta y = \frac{(x-a)^\mu (b-x)^\nu}{M} \varepsilon,$$

wodurch bei passender Wahl der Exponenten eine genügende Anzahl der Grössen δy, $\delta y'$, ... an den Grenzen zum Verschwinden gebracht werden und δJ_n von Null verschieden wird. Hieraus folgt, dass M auch in keinem Teil des Intervalls $a \ldots b$ von Null verschieden sein kann. Ähnlich sind die demselben Zweck dienenden Betrachtungen

13) Oeuvres 10, p. 399.
14) Oeuvres 9, p. 301.
15) Oeuvres 9, p. 298.
16) Lehrbuch § 24, p. 90.

von *E. Heine*[17]) und *P. du Bois-Reymond*[18]), welche hervorheben, dass M als stetige Funktion von x vorausgesetzt werden muss. Auf Anregung von *Weierstrass* setzt *Zermelo*[19]), wenn M nur für $x = x_0$ nicht verschwindet und $a < x_0 < b$ ist,

$$\delta y = \varepsilon (x - a)^m (b - x)^m e^{-\varrho^2 (x - x_0)};$$

nimmt man ϱ hinreichend gross, so überwiegt der von der Umgebung des Wertes x_0 zu dem Integral δJ_n gelieferte Beitrag alles übrige und macht δJ_n von Null verschieden. — Bei mehreren, z. B. zwei unbekannten Funktionen erhält man ebenso statt der Gleichung (5) das System

$$M = 0, \quad N = 0$$

als notwendige Bedingungen des Extremums.

Als weitere notwendige Bedingung ergiebt die Formel (4) sodann, dass die Summe der vor das Integralzeichen tretenden Glieder verschwinden muss für alle mit den Bedingungen der Aufgabe verträglichen Grenzwerte der Variationen. Diese werden im allgemeinen durch gewisse Gleichungen aneinander gebunden sein, welche man nach *Lagrange*[20]) ähnlich wie bei den Problemen des gewöhnlichen relativen Extremums (II A 2, Nr. 22) in Rechnung ziehen kann.

7. Theorie der Integrabilität. Aus der Formel (4) für den Fall einer einzigen variierbaren Funktion schliesst *Euler*[21]), dass das Bestehen der Identität $M = 0$ die hinreichende und notwendige Bedingung für die Integrabilität der Funktion f, d. h. dafür ist, dass bei einer willkürlichen Funktion y eine mit f durch die Gleichung

$$\frac{dF}{dx} = f(x, y, \ldots)$$

verbundene Funktion $F(x, y, y', \ldots)$ existiert.

J. Bertrand[22]) hat die Erwägungen *Euler*'s näher ausgeführt und auf den Fall mehrerer Funktionen ausgedehnt. Die meisten mit dieser Theorie der Integrabilität beschäftigten Autoren, *Lagrange*[23]), *Poisson*[24]) u. a. bestreben sich, die Variationsrechnung zu eliminieren,

17) Math. Ann. 2 (1870), p. 188.
18) Math. Ann. 15 (1879), p. 297, 305.
19) Untersuchungen zur Variationsrechnung, Diss. Berlin 1894, p. 41.
20) Oeuvres 10, p. 422.
21) Meth. inv. Kap. I, § 34, p. 15; Petrop. N. Comm. 10, p. 134.
22) J. éc. polyt. 17, cah. 28 (1841), p. 249.
23) Oeuvres 9, p. 317; 10, p. 364.
24) Par. Mém. 12, p. 261.

sodass es hier genügt, auf die eingehende historische Darstellung von *J. Todhunter*[25]) zu verweisen.

8. Euler's Multiplikatormethode für $\delta U_2 = 0$, $m = 1$. Im dritten Buche der Methodus inveniendi[26]) behandelt *Euler*, allmählich zu allgemeineren Fragen fortschreitend, schliesslich die Aufgabe, das Extremum des Integrals

$$W = \int_a^b f(x, v, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})\, dx$$

zu bestimmen, wenn v durch eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$v' - g(x, v, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{6}$$

gegeben ist. Durch eine höchst scharfsinnige Infinitesimalbetrachtung von der in Nr. 2 geschilderten Art gelangt er zur Methode des Multiplikators, d. h. er zeigt, dass die Grösse W, wenn λ diejenige Lösung der Gleichung

$$\frac{d\lambda}{dx} + \lambda \frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \tag{7}$$

ist, welche für $x = b$ verschwindet, und y an einer einzigen Stelle um ε wächst, den Zuwachs

$$P\varepsilon = \varepsilon \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y'} \right) + \cdots \right.$$
$$\left. + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y^{(n)}} \right) \right\}$$

erhält, sodass als notwendige Bedingung des Extremums folgt $P = 0$.

Dies Resultat beweist man leicht mittelst des Zeichens δ; *Lagrange* hat es in seiner ersten Arbeit[27]) für zwei nach verschiedenen Richtungen spezialisierte Fälle obiger Aufgabe gethan; *Euler* giebt sodann[28]) für das allgemeine Integral W bei der Annahme (6) die Transformation

$$\delta W = \int_a^b dx \delta(f + \lambda(g - v')) = \int_a^b P \delta y\, dx + \Big[R - \lambda \delta v \Big]_a^b, \tag{8}$$

wobei R nur von δy und den Ableitungen dieser Grösse abhängt. Wenn diese Grössen an den Grenzen und δv für $x = a$ verschwinden, so ergiebt die Gleichung

$$\lambda(b) = 0, \tag{9}$$

25) History p. 505.
26) Kap. III, § 6, 19, 31, 38, p. 118; Kap. IV, § 7, Nr. IV, V p. 133
27) Oeuvres 1, p. 347, 350; 10, p. 419.
28) Petrop. N. Comm. 10, p. 79.

dass δW sich auf das Integral allein reduziert; hieraus folgt $P = 0$, da für δy ausser den angegebenen keine weiteren Beschränkungen nötig sind. Dabei ist δv für $x = b$ im allgemeinen von Null verschieden; nur wo dies durch die Bedingungen der Aufgabe zugelassen wird, kann *Euler*'s Ableitung als streng gelten, z. B. für die von ihm gelöste Aufgabe der Brachistochrone im widerstehenden Mittel[29]). — Die Gleichung (9) für den bezeichneten Fall dürfte der Kern eines im allgemeinen unrichtigen Satzes von *C. Delaunay*[30]) sein.

In dem speziellen Falle $f = g$, den auch *Lagrange* behandelt, löst die *Euler*'sche Methode die Aufgabe, y so zu bestimmen, dass eine für $x = a$ gegebene Lösung der Differentialgleichung (7) für $x = b$ einen extremen Wert annimmt. Diese sehr allgemeine Art von Aufgaben, auf welche *Euler*[31]) und *Lagrange*[32]) mehrfach hinweisen, ist von *A. Mayer*[33]) auf Differentialgleichungen gebracht (s. Nr. **15**). *Euler* giebt als Beispiel die Bestimmung der Kurve, auf welcher ein mit Reibung fallender Punkt die grösste Geschwindigkeit erreicht[34]).

Lagrange dehnt in seiner zweiten Abhandlung[35]) die angedeutete Methode auf den Fall aus, dass höhere Ableitungen von v in f und g vorkommen, hat aber sonst die Theorie des Multiplikators, so vielfach er ihn, besonders in der Mechanik benutzt hat, nicht weiter gefördert. Die isoperimetrischen Aufgaben glaubte er durch obige Betrachtungen der Multiplikatorenmethode zugänglich gemacht zu haben, während *Euler* für die besondere Natur dieser Aufgaben ein gewisses Gefühl gehabt zu haben scheint (s. u.). Nach allem erscheint es nicht gerechtfertigt, die Multiplikatorenmethode nach *Lagrange* allein zu benennen.

9. Der Multiplikator bei isoperimetrischen Aufgaben. Isoperimetrisch im weiteren Sinne nennt man die Aufgabe, J_n zu einem Extremum zu machen, wenn für ein anderes Integral

$$K_n = \int_a^b g(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\, dx$$

ein fester Wert vorgeschrieben ist oder mehrere solcher Bedingungen

29) Meth. inv. Kap. III, § 46, p. 126.

30) J. éc. polyt. 17, cah. 29 (1843), p. 85.

31) Meth. inv. Kap. I, § 37, p. 17; Kap. IV, § 7, p. 133.

32) Oeuvres 1, p. 350.

33) Leipz. Ber. 30 (1878), p. 16. S. a. *Jermakoff*, Kiew Univ.-Nachr. 29, Dez. 1889, p. 105.

34) Meth. inv. p. 122.

35) Oeuvres 2, p. 40.

gegeben sind; ist speziell J_n ein Bogen-, K_n ein Flächenintegral oder umgekehrt, so hat man das isoperimetrische Problem im eigentlichen, engern Sinne. Eine notwendige Bedingung für ein solches begrenztes Extremum erhält man nach *Euler*, indem man

$$\delta J_n + \lambda \delta K_n = 0 \tag{10}$$

setzt, wobei λ eine gewisse Konstante bedeutet. Er beweist dies[36]), indem er nach der in Nr. 2 skizzierten Weise zwei aufeinanderfolgende Ordinaten y um ε und η vermehrt.

Ein anderer Beweis von *Euler* besteht darin[37]), dass er δJ_n und δK_n als lineare Formen der verschiedenen Werte von δy ansieht, und davon ausgeht, dass lineare Formen sich um einen konstanten Faktor unterscheiden, wenn das Verschwinden der einen stets die andere zum Verschwinden bringt. Ist nach partieller Integration

$$\delta J_n = \int_a^b M \delta y \, dx, \quad \delta K_n = \int_a^b M_1 \delta y \, dx,$$

so ergiebt sich, dass $M : M_1$ konstant sein, d. h. die Gleichung (10) bei passender Wahl von λ für willkürliche Variationen bestehen muss.

Einen strengeren Beweis hat *J. Bertrand*[38]) gegeben. Derselbe ist dem ersten *Euler*'schen Beweise verwandt und unterscheidet sich von ihm hauptsächlich dadurch, dass y an zwei beliebigen nicht benachbarten Stellen so variiert wird, dass δK_n verschwindet. Einen andern Beweis giebt *C. Sturm* in seinen Vorlesungen[39]); indem er $M_1 \delta y = \varphi'(x)$ ansetzt und unter φ irgend eine an den Integrationsgrenzen verschwindende Funktion versteht, bewirkt er, dass δK_n verschwindet und nach partieller Integration

$$\delta J_n = -\int_a^b \varphi(x) \frac{d}{dx}\left(\frac{M}{M_1}\right) dx$$

wird, woraus sich (10) ergiebt. *P. du Bois-Reymond*[40]) giebt auf Anregung von *Reiff* einen Beweis, der dem *Bertrand*'schen nahe verwandt ist; ein zweiter Beweis geht von folgendem Gedanken aus. Sind $\delta_1 y$ und $\delta_2 y$ irgend zwei Variationen, die nebst einer angemessenen Anzahl ihrer Ableitungen an den Grenzen verschwinden,

36) Meth. inv. Kap. V, § 27, p. 184.

37) Petrop. N. Comm. 10, p. 89.

38) J. de math. (1) 7 (1842), p. 55.

39) Cours d'analyse publ. p. Prouhet (5. éd., 1877), 2, p. 330. S. a. *Serret-Harnack*, Diff.- u. Int.-Rechn. 2^2, p. 359.

40) Math. Ann. 15 (1879), p. 310.

$\delta_\nu J_n$, $\delta_\nu K_n$ die der Variation $\delta_\nu y$ entsprechenden Variationen der Integrale, so verschwindet δK_n, wenn

$$\delta y = \delta_1 y \delta_2 K_n - \delta_2 y \delta_1 K_n;$$

bildet man den zugehörigen Wert von δJ_n, welcher ebenfalls verschwindet, so ergiebt sich (10). Einen diesem verwandten Beweis giebt *L. Scheeffer*[41]), indem er, einem Gedanken von *Weierstrass* folgend, ansetzt $\delta y = \delta_1 y + \varkappa \delta_2 y$, wobei $\varkappa$ eine Konstante ist; soll δK_n verschwinden, so ergiebt sich $\varkappa = \varkappa_0 \delta_1 K_n$, wobei $\varkappa_0$ eine von $\delta_1 y$ unabhängige Grösse ist. Setzt man mit diesem Werte von $\varkappa$ die Gleichung $\delta J_n = 0$ an, so erhält man (10) für $\delta y = \delta_1 y$.

Alle diese Beweise versagen in dem Ausnahmefall, dass längs der variierten, d. h. der gesuchten Kurve δK_n verschwindet. Die Ausdehnung auf den Fall mehrerer Bedingungen oder Unbekannten ist überall leicht.

10. Die Multiplikatoren und notwendigen Bedingungen für $\delta U_n = 0$. *A. Mayer*[42]) hat darauf hingewiesen, dass das in Nr. 8 erörterte Problem des Integrals W wesentlich neue Methoden erfordert, wenn der Werth von v für $x = b$ vorgeschrieben ist, wie es z. B. der Fall ist bei dem von *Euler* gelösten Problem der Brachistochrone im widerstehenden Mittel, wenn die Endgeschwindigkeit gegeben ist[43]). Dann gilt noch die Gleichung (8), wenn λ irgend eine Lösung der Gleichung (7) ist; ebenso erhält man, wenn man $f = g$ setzt und μ irgend eine Lösung der homogen gemachten Gleichung (7) ist,

$$\delta v = \int_a^x Q \delta y \, dx + \left[S - \mu \delta v \right]_a^x,$$

wobei S ein Ausdruck derselben Art wie R ist. Hieraus ergiebt sich, da δv für $x = b$ verschwinden soll, eine Gleichung, welche die Freiheit der Variation δy, abweichend von Nr. 8, beschränkt; wird angenommen, dass eine Anzahl Grenzwerte δy, $\delta y'$, ... verschwinden, so hat man

$$\delta W = \int_a^b P \delta y \, dx = 0, \quad \int_a^b Q \delta y \, dx = 0,$$

d. h. sobald die zweite Gleichung gilt, folgt die erste. Auf dieses Gleichungssystem sind die bei der isoperimetrischen Aufgabe benutz-

41) Math. Ann. 25 (1885), p. 583.
42) Math. Ann. 26 (1886), p. 74.
43) Meth. inv. Kap. V, § 52, p. 204.

ten Schlüsse anwendbar; *Mayer* erhält nach der von *Scheeffer* gegebenen Methode, wenn c eine Konstante ist, die Gleichung

$$P + cQ = 0, \quad \frac{\partial (f + \lambda_1 g)}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial (f + \lambda_1 g)}{dy'} + \cdots = 0,$$

wobei $\lambda_1 = \lambda + \mu c$ gesetzt ist, sodass λ_1 eine bestimmte Lösung der Gleichung (7) bedeutet. Diese spezielle Wahl des Multiplikators trifft auch *Euler* in dem erwähnten Beispiel. *Mayer* führt die Untersuchung für den allgemeinen Fall des Integrals:

$$U_n = \int_a^b f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')$$

mit den Bedingungsgleichungen

$$(11) \quad \varphi_\varrho(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0, \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, m)$$

durch und zeigt zum ersten Mal in strenger Weise, dass die Gleichungen

$$(12) \quad \frac{\partial F}{\partial y_\nu} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_\nu'} = 0, \quad F = f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \cdots + \lambda_m \varphi_m$$

notwendige Bedingungen des Extremums sind, wobei $\nu = 1, 2, \ldots, n$ und die Grössen λ_ϱ Funktionen von x sind, welche zusammen mit den n Unbekannten aus den $n + m$ Gleichungen (11), (12) im allgemeinen zu bestimmen sind. — Auf das Problem des Integrals U_n kann der Fall, dass höhere Differentialquotienten vorkommen, durch Einführung neuer Unbekannten und neuer Bedingungsgleichungen von der Form $y_\nu' - y_{\nu+1} = 0$ reduziert werden, wie *A. Clebsch* bemerkt hat[44]). — *A. Mayer* hat ferner gezeigt[45]), dass die Multiplikatorenmethode anwendbar ist, wenn nicht ein bestimmtes Integral, sondern die Lösung einer Differentialgleichung ein Extremum werden soll (Nr. 8).

Der Fehler aller älteren Ableitungen der *Euler*'schen Regel bestand darin, dass man glaubte, bei dem Problem des Integrals U_n stets $n - m$ Variationen δy_ν als frei verfügbar ansehen zu können, während sie doch dadurch beschränkt sind, dass für $x = b$ alle n Variationen δy_ν verschwinden sollen. Dieser Fehler ist noch in neuester Zeit wiederholt.

Einen wesentlich neuen Beweis der Gleichungen (12), bei welchem nicht auf die isoperimetrische Aufgabe zurückgegangen wird, hat *B. Turksma*[46]) gegeben. Er betrachtet, was bei der Ableitung

44) J. f. Math. 55 (1858), p. 267.
45) Leipz. Ber. 47 (1895), p. 129.
46) Math. Ann. 47 (1896), p. 33. S. a. Fussn. 118.

notwendiger Bedingungen erlaubt ist, ein spezielles System von Variationen

$$\delta y_\nu = \alpha_{\nu 0} z + \frac{d(\alpha_{\nu 1} z)}{dx} + \frac{d^2(\alpha_{\nu 2} z)}{dx^2} + \cdots + \frac{d^\sigma(\alpha_{\nu \sigma} z)}{dx^\sigma},$$

in welchem z eine willkürliche Funktion bedeutet; setzt man diese Werte in die Gleichungen

$$\sum_\nu \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y_\nu} \delta y_\nu + \sum_\nu \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y'_\nu} \delta y'_\nu = 0, \quad \delta \int f dx = 0$$

ein, so ergeben sich durch partielle Integration lineare Bedingungsgleichungen für die Funktionen α, deren Anzahl bei passender Wahl des Exponenten σ gleich der Anzahl der Grössen α ist. Bringt man zum Ausdruck, dass die linearen Formen der Grössen α, welche die linken Seiten dieser Gleichungen sind, linear abhängig sind, dass es also von den α unabhängige Multiplikatoren giebt, deren Produkte in die Koeffizienten einer beliebig fixierten Grösse α in jenen Formen die Summe Null ergeben, so bemerkt man durch einfache Rechnung, dass diese Multiplikatoren sich durch m Grössen λ und ihre ersten Ableitungen ausdrücken, wodurch die Gleichungen (12) resultieren.

Sowohl *Mayer* wie *Turksma*[47]) weisen auf gewisse Ausnahmefälle hin, welche sich den Beweisen für die Multiplikatorregel entziehen, übrigens aber noch nicht genau formuliert sind; hierher gehört der am Ende von Nr. 9 erwähnte Ausnahmefall, sowie das von *Lindelöf-Moigno* und *J. Vieille*[48]), von letzterem im wesentlichen richtig, erörterte Problem, zwischen zwei parallelen Ebenen eine Linie von gegebener Länge so zu ziehen, dass die durch sie gehende, auf den Ebenen senkrechte und von ihnen begrenzte Cylinderfläche ein Minimum ist.

Die ganze Theorie des Multiplikators lässt sich offenbar auf den in der Mechanik (Nr. **26**) vorkommenden Fall übertragen, dass anstatt der Gleichung $\delta U_n = 0$ verlangt wird, dass das Integral einer linearen Form von Variationen verschwinden soll; denn in diese Gestalt wird die Grösse δU_n immer zuerst gebracht.

11. Formale Entwicklungen; Jacobi-Hamilton'sche Methode. Die Untersuchung der Vortheile, welche die Form der Differentialgleichungen in den Problemen der Variationsrechnung für die In-

47) Math. Ann. 26, p. 80; 47, p. 40.

48) Calc. des var. p. 299; *J. Vieille*, Cours complémentaire d'analyse et de mécanique, p. 118 (1851).

tegration darbietet, beginnt mit der unbewiesenen Bemerkung *C. G. J. Jacobi*'s[49]), dass die *Jacobi-Hamilton*'sche Methode der Dynamik (II A 5, Nr. **31**) auf das Problem $\delta J_1 = 0$ anwendbar sei. *M. Ostrogradsky*[50]) hat für ein Integral J, welches beliebig viele durch keine Bedingungsgleichungen verbundene Unbekannte und beliebig hohe Ableitungen derselben enthält, gezeigt, dass die Differentialgleichungen des Problems $\delta J = 0$ auf die *Hamilton*'sche kanonische Form gebracht werden können, und dass ihre Integration durch die einer nicht-linearen partiellen Differentialgleichung ersetzt werden kann; die Ableitung des letzteren Resultats entspricht dem von *Hamilton* gemachten Übergang vom Prinzip der kleinsten Aktion zu dem der variierenden Aktion sowie der von *Jacobi* herrührenden Vereinfachung dieser Methode[50a]). *Ostrogradsky* hat ferner für das bezeichnete Problem Entwicklungen gegeben, welche der *Jacobi-Poisson*'schen Theorie der Variation der Konstanten in der Dynamik analog sind.

A. Clebsch[51]) hat sodann bemerkt, dass die Differentialgleichungen des Problems $\delta U_n = 0$, wenn m beliebig ist, im allgemeinen gestatten, die Unbekannten y_ν, λ_ϱ durch x und $2n$ willkürliche Konstanten a_ν, dann aber auch letztere durch n willkürliche Konstanten α_ν und die n Grössen y_ν auszudrücken. Je nachdem ein von den Unbekannten abhängiger Ausdruck V in der ersten oder zweiten Form dargestellt wird, werde er durch $\overline{V}$ oder (V) bezeichnet. Setzt man z. B.

$$\overline{V} = \int_a^x \bar{F}\,dx = \int_a^x f\,dx,$$

womit auch (V) definiert ist, so ergiebt sich durch einfache Differentiationen

$$\frac{\overline{\partial F}}{\partial y_\nu'} = \left(\frac{\partial V}{\partial y_\nu}\right), \quad \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha_\nu}\right) = \beta_\nu, \tag{13}$$

wobei β_ν neue Konstanten sind. Da nun

$$F = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu' \left(\frac{\partial V}{\partial y_\nu}\right),$$

so kann man aus dieser Gleichung und den ersten n Gleichungen (13) die Grössen y_ν' eliminieren und so eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung für (V) erhalten. Ist irgend ein n Konstanten enthaltendes

---

49) Werke 4, p. 50.
50) Petersb. Mém. (6) 4 (1850), p. 385.
50a) II A 5, Fussn. 178.
51) J. f. Math. 55 (1858), p. 260, 337.

Integral dieser letzten Gleichung gegeben, so geben die letzten n Gleichungen (13) die Funktionen $\bar{y}_\nu$, womit dann die Gleichungen (11), (12) gelöst sind. Damit ist die *Jacobi-Hamilton*'sche Methode auf das Problem $\delta U_n = 0$ ausgedehnt. *Mayer*[52]) hat auch die kanonische Form der Differentialgleichungen desselben gegeben. — *Jacobi* hat in seinen Vorlesungen die obige Methode für das Problem $\delta U_n = 0$ im Falle $m = 0$ entwickelt[53]) und in einer aus dem Nachlass publizierten Abhandlung[54]) den Multiplikator des Gleichungssystems $\delta J_n = 0$ bestimmt und für einen etwas allgemeineren Fall untersucht.

Die Frage, wann eine gegebene Differentialgleichung als aus einem Problem $\delta J_n = 0$ hervorgegangen betrachtet werden kann, haben *B. Imschenetzky*[55]), *N. Sonin*[56]), *G. Darboux*[57]), *A. Hirsch*[58]) untersucht; *Hirsch* beantwortet diese Frage zuerst vollständig, indem er vom Algorithmus der adjungierten linearen Differentialausdrücke Gebrauch macht.

12. Zweite Variation von J_1 nach Legendre. Als zweite Variation eines Integrals U_n oder J_n bei festen Grenzen und Grenzwerten der n Unbekannten bezw. der Unbekannten und ihrer $n-1$ ersten Ableitungen ($\delta^2 U_n$, $\delta^2 J_n$) bezeichnen wir das von a bis b genommene Integral der doppelten Summe aller in den Variationen δy_ν, $\delta y_\nu'$ bezw. δy, $\delta y'$, ..., $\delta y^{(n-1)}$ quadratischen Glieder, welche in der *Taylor*'schen Entwicklung des variierten Integranden, d. h. beziehentlich der Ausdrücke

$$f(x, y_1 + \delta y_1, \ldots, y_n + \delta y_n, y_1' + \delta y_1', \ldots, y_n' + \delta y_n'),$$
$$f(x, y + \delta y, y' + \delta y', \ldots, y^{(n)} + \delta y^{(n)})$$

auftreten. *Legendre*[59]), bei dem dieser Begriff zuerst erscheint, nennt zweite Variation das Integral des einfachen Inbegriffs der quadratischen Glieder; aber nur die obige Definition lässt sich mit dem Algorithmus der höheren Variationen in Einklang bringen (Nr. 22); sie geht wesentlich auf *Jacobi*[60]) zurück. Bei den späteren Autoren findet sich bald die eine, bald die andere Definition.

52) J. f. Math. 69, p. 241.

53) Neunte Vorl., Werke Suppl. p. 143.

54) Werke 5, p. 465. Zuerst abgedruckt in der ersten Auflage der Dynamik. S. a. Werke 5, p. 282.

55) St. Pét. Bull. 31 (1886), p. 283.

56) Warschau Univ. Nachr. 1886.

57) Théorie générale des surfaces 3 (1894), p. 53.

58) Math. Ann. 49 (1897), p. 49.

59) Par. Hist. 1786 (1788), p. 7; Ostwald's Klass. Nr. 47.

60) Werke 4, p. 42.

Der Hauptzweck, dem die zweite Variation dienen soll, ist die Aufstellung *hinreichender* Bedingungen des Extremums; dazu sucht man zunächst das Zeichen der zweiten Variation zu bestimmen. *Legendre* transformiert zu diesem Zweck $\delta^2 J_1$, indem er den verschwindenden Ausdruck

$$\left[\alpha\delta y^2\right]_a^b = \int_a^b \frac{d(\alpha\delta y^2)}{dx}\,dx = \int_a^b dx(2\alpha\delta y\delta y' + \alpha'\delta y^2)$$

addiert:

$$(14)\quad \delta^2 J_1 = \int_a^b dx\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\delta y'^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'} + \alpha\right)\delta y\delta y' + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \alpha'\right)\delta y^2\right\},$$

und setzt für die Grösse α folgende Differentialgleichung an:

$$(15)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \alpha'\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'} + \alpha\right)^2 = 0;$$

alsdann ist die quadratische Form, welche in der Gleichung (14) unter dem Integralzeichen steht, das Quadrat eines reellen, in δy und $\delta y'$ linearen Ausdrucks multipliziert mit $\partial^2 f : \partial y'^2$. Die zweite Variation hat also das Vorzeichen dieser Grösse. Analog zeigt *Legendre,* dass die Grössen

$$\delta^2 J_2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y''^2}$$

gleiches Zeichen haben. Für die isoperimetrische Aufgabe J_2 (Nr. 9) bei gegebenem Wert K_2 zeigt *V. Brunacci*[61]), indem er einen Irrtum *Legendre*'s berichtigt, nach der von diesem gegebenen Methode, dass die Grössen

$$\delta^2 J_2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y''^2} + \lambda\frac{\partial^2 g}{\partial y''^2}$$

gleiches Zeichen haben.

Lagrange[62]) hat eine wichtige Modifikation der *Legendre*'schen Untersuchungen gegeben, die freilich wenig Beachtung fand; er setzt nicht die Gleichung (15) an, sondern setzt nur ihre linke Seite positiv. Dann hat auch noch die quadratische Form auf der rechten Seite der Gleichung (14) bei beliebigen reellen Werten von δy ein konstantes Zeichen, solange dies von $\partial^2 f : \partial y'^2$ gilt; sie reduziert sich aber nicht auf ein einziges Quadrat. Man kann aus dieser Betrachtung in aller Strenge schliessen, dass bei hinreichender Beschränkung des Integrationsintervalls und konstantem Zeichen der Grösse $\partial^2 f : \partial y'^2$ das Integral J_1 wirklich ein Extremum ist, da bei der angegebenen

61) Mem. dell' istituto nazionale italiano 1^2 (1806), p. 191.

62) Oeuvres 9, p. 304.

Beschaffenheit der quadratischen Form gegen sie alle höheren Glieder in der Entwicklung von $f(x, y+\delta y, y'+\delta y')$ vernachlässigt werden können, während der Schluss *Legendre*'s vom konstanten Zeichen der Grösse $\delta^2 J_1$ auf das Eintreten eines Extremums anfechtbar ist (Nr. **20**). *Lagrange* weist ferner darauf hin, dass die *Legendre*'sche Transformation nur dann möglich ist, wenn α für das ganze Integrationsintervall als stetige Funktion bestimmt werden kann.

13. Transformation von $\delta^2 J_n$ nach Jacobi. Diese Schwierigkeit erledigt *Jacobi*[63]), indem er zeigt, dass die Integrale der Gleichung (15) durch blosse Differentiation gefunden werden können, sobald die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

integriert ist. Enthält die allgemeine Lösung die Konstanten c_1 und c_2 und sind C weitere Konstanten, so setzt *Jacobi*

$$u = C_1 \frac{\partial y}{\partial c_2} + C_2 \frac{\partial y}{\partial c_2}, \quad -\alpha = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial y'} + \frac{1}{u}\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\frac{du}{dx};$$

kann man also die Grössen C so bestimmen, dass u im Integrationsgebiet nicht verschwindet, so ist α eine in diesem Gebiet stetige Lösung der Gleichung (15).

Bei dem allgemeinen J_n geht *Jacobi* von folgendem Lemma aus. Ist y eine Lösung der Gleichung

$$0 = Ay + \frac{d(A_1 y')}{dx} + \cdots + \frac{d^n (A_n y^{(n)})}{dx^n} = Y,$$

so ist der mit einer unbestimmten Funktion u gebildete Ausdruck

$$y\left\{Au + \frac{d(A_1 u')}{dx} + \cdots + \frac{d^n (A_n u^{(n)})}{dx^n}\right\}$$

integrabel und sein Integral von der Form

$$Bt' + \frac{d(B_1 t'')}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-1}(B_{n-1} t^{(n)})}{dx^{n-1}},$$

wobei $ty = u$, A_ν gegebene und B_ν von u unabhängige Funktionen von x sind. Dieses von *Jacobi* ohne Beweis gegebene Lemma beweisen *V. Lebesgue*[64]), *C. Delaunay*[65]), *F. Minding*[66]) durch Rechnung, wobei letzterer explizite Ausdrücke der Grössen B angiebt;

63) J. f. Math. 17 (1837); Werke 4, p. 41.
64) J. de math. (1) 6 (1841), p. 17.
65) J. de math. (1) 6 (1841), p. 209.
66) J. f. Math. 55 (1858), p. 300.

Bertrand[67]) und *F. Eisenlohr*[68]) auf Grund der Integrabilitätstheorie, indem sie mehrfach den Schluss anwenden, dass eine Grösse von gewisser Form, wenn sie integrabel ist, identisch verschwindet; *E. Heine*[69]) mittelst des gleichzeitigen Gebrauchs zweier von einander unabhängiger Variationen. — *Jacobi* macht sodann die Bemerkung, dass die zweite Variation in die Form

$$\delta^2 J_n = \int_a^b \delta M \, \delta y \, dx$$

gebracht werden kann (M in der Bedeutung von Nr. 4); es kann dies leicht aus der Art, wie man in jeder *Taylor*'schen Entwicklung die quadratischen Glieder aus den linearen ableitet, geschlossen werden. Wenn es nun gelingt, δM auf die Form Y zu bringen, so nimmt $\delta^2 J_n$ nach *Jacobi*'s unbewiesener Angabe auf Grund des Lemmas durch mehrfache partielle Integration die Form

$$\delta^2 J_n = \int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)} \partial y^{(n)}} \omega^2 dx \tag{16}$$

an, wobei ω eine lineare Form der Grössen $\delta y, \delta y', \ldots, \delta y^{(n)}$ ist. Diese Formel findet sich für $n = 2$ schon bei *Legendre*. Hat also $\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)} \partial y^{(n)}}$ ein konstantes Zeichen, so gilt von $\delta^2 J_n$ dasselbe.

Bei der angedeuteten Transformation braucht man Lösungen der linearen Gleichung $Y = 0$ oder $\delta M = 0$ mit der Unbekannten δy; da mit dem Symbol δ in den Ausdruck M genau so operiert wird wie mit dem Zeichen der Ableitung nach irgend einem Parameter, so hat man sofort als allgemeine Lösung der Gleichung $\delta M = 0$ den Ausdruck

$$\delta y = \sum_{\nu=1}^{2n} C_\nu \frac{\partial y}{\partial c_\nu}, \tag{17}$$

wenn c_ν die in der Lösung der Gleichung $M = 0$ vorkommenden Integrationskonstanten, C_ν neue Konstanten sind. Für $n = 2$ werden bei der Herstellung der Formel (16) zwei Ausdrücke (17) gebraucht, welche zusammen acht Konstanten C enthalten; sie treten aber in solchen Verbindungen auf, dass schliesslich die Form ω nur ebenso viel, nämlich drei willkürliche Grössen enthält wie bei *Legendre*. Die

67) J. éc. polyt. 17, cah. 28 (1841), p. 276.
68) Untersuchungen über Variationsrechnung, Mannheim 1853.
69) J. f. Math. 54 (1857), p. 68.

von *Jacobi* angegebenen Resultate für $n = 2$ hat *Eisenlohr*[70]) zuerst korrekt abgeleitet; benselben Fall behandeln *G. Mainardi*[71]) und *F. Brioschi*[72]). Dass allgemein δM auf die Form Y gebracht werden kann, hat *Delaunay*[73]) gezeigt. *S. Spitzer*[74]) geht von der Formel (16) aus, ohne auf ihre Herstellung durch partielle Integrationen zu achten, schliesst aus ihr, dass die Ausdrücke (17) auch Lösungen der linearen Gleichung $\omega = 0$ sein müssen, und bestimmt hierauf die Koeffizienten der Grössen $\delta y, \delta y', \ldots$ in ω; er führt die Rechnungen für $n = 1, 2, 3$ durch und zeigt, dass die Konstanten C in jenen Koeffizienten in gewissen Verbindungen auftreten. Die Anzahl der unabhängigen unter ihnen erweist sich in diesen Fällen gleich der Ordnung des Gleichungssystems, welches sich ergiebt, wenn man ansetzt

$$\delta^2 \int_a^x f(x, y', \ldots, y^{(n)})\, dx = \varpi + \int_a^x \omega^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)} \partial y^{(n)}}\, dx, \tag{18}$$

unter ϖ eine quadratische Form von $\delta y, \delta y', \ldots, \delta y^{(n-1)}$ versteht, und die Koeffizienten der Formen ϖ und ω als Unbekannte ansieht. Dieses System ist die Verallgemeinerung der *Legendre*'schen Gleichung (15). — *Spitzer* behandelt auch die Form der zweiten Variation in den Ausnahmefällen, wenn die Differentialgleichung $M = 0$ von niedrigerer als der $2n^{\text{ten}}$ Ordnung ist[75]).

14. Beweis der formalen Sätze von Jacobi durch Hesse und Frobenius. *O. Hesse*[76]) beweist und vervollständigt die Resultate von *Jacobi*, soweit sie formaler Natur sind. Er giebt zuerst die allgemeine Ableitung der Formel (16) durch partielle Integration; es dient dazu ein Algorithmus gewisser linearer Differentialausdrücke $\Psi, \Psi_1, \ldots$ deren erster dadurch definiert ist, dass $\delta M = \Psi(\delta y)$. Sind $u, v, w, s, \ldots$ n Integrale der Gleichung $\Psi(z) = 0$; setzt man ferner

$$\begin{gathered} z = u z_1, \quad z_1' = v_1' z_2', \quad z_2'' = w_2'' z_3'', \ldots \\ v = u v_1, \quad w = u w_1, \ldots, w_1' = v_1' w_2', \quad s_1' = v_1' s_2', \ldots \end{gathered} \tag{19}$$

und beschränkt jene Integrale durch die $\frac{1}{2} n(n-1)$ Bedingungen

70) Fussn. 68, p. 13.
71) Ann. fis. mat. 3 (1852), p. 149, 379.
72) Ann. fis. mat. 3, p. 322.
73) Fussn. 65, p. 211.
74) Wien. Ber. 12 (1854), p. 1027; 14 (1855), p. 41.
75) A. a. O. 12, p. 1031, 1040; *Euler*, Meth. inv. Kap. I, § 6, 26, 44.
76) J. f. Math. 54 (1857), Werke, p. 413.

$$\Psi_1(v_1') = \Psi_2(w_1') = \Psi_2(w_2') = \cdots = 0,$$

sodass sie nur $n^2 + \frac{1}{2}n(n+1)$ Konstanten enthalten, so ist nach *Hesse* für $z = \delta y$

$$\delta^2 J_n = \int_a^b \left(z_n^{(n)}\right)^2 u^2 v_1'^2 w_2''^2 \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)} \partial y^{(n)}} dx.$$

Der Integrand kann nach (19) als Quotient der Quadrate zweier aus z, u, v, ... und den Ableitungen dieser Grössen gebildeten Determinanten dargestellt werden. In diesen treten die noch übrigen Konstanten der Integrale u, v, ..., wie *M. Stern*[77]) gezeigt hat, in $\frac{1}{2}n(n+1)$ unabhängigen Verbindungen auf, sodass im ganzen die *Hesse*'sche Transformation $\frac{1}{2}n(n+1)$ Parameter, d. h. soviel wie die Form ϖ Koeffizienten enthält. Eine elegante Ableitung der ganzen *Jacobi-Hesse*'schen Theorie mittelst des Algorithmus der adjungierten linearen Differentialausdrücke giebt *G. Frobenius*[78]).

15. Transformation von $\delta^2 U_n$ nach Spitzer, Clebsch, Mayer, Lipschitz. *S. Spitzer*[79]) ist der erste, der $\delta^2 U_2$ für $m = 0$ betrachtet. Durch eine Betrachtung, welche der an die Gleichung (18) geknüpften analog ist, zeigt er, dass $\delta^2 U_2$ konstanten Zeichens ist, wenn von den Grössen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_1'^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y_1'^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y_2'^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y_1' \partial y_2'}\right)^2$$

die erste von a bis b konstanten Zeichens, die zweite positiv ist, und beweist, dass die sechs Koeffizienten der Form ϖ in dem Analogon der Gleichung (18) durch ebenso viele Differentialgleichungen erster Ordnung bestimmt sind, deren Integrale durch die den Ausdrücken (17) analogen Grössen dargestellt werden können.

A. Clebsch stellt für das allgemeine Integral U_n mit beliebig vielen Bedingungsgleichungen ($m > 0$) analoge Untersuchungen an[80]), welche *A. Mayer* vereinfacht hat[81]). Die Variationen δy_r mögen an den Integrationsgrenzen verschwinden, und es sei $\Omega(u, r)$ der Koeffizient von $\frac{1}{2}\varepsilon^2$ in der Entwicklung von F, wenn man y_r durch

77) Gött. Abh. 13 (1868), p. 53.
78) J. f. Math. 85 (1878), p. 185.
79) Wien. Ber. 14, p. 57.
80) J. f. Math. 55 (1858), p. 254, 335.
81) Beiträge zur Theorie der Maxima und Minima einfacher Integrale, Leipzig 1866.

$y_\nu + \varepsilon u_\nu$, λ_ϱ durch $\lambda_\varrho + \varepsilon r_\varrho$ ersetzt; der obere Index Null bedeute die Substitution $u_\nu = \delta y_\nu$, $r_\varrho = \delta \lambda_\varrho$. Dann ist

$$\delta^2 \int_a^x f\,dx = \delta^2 \int_a^x F\,dx = \int_a^x \Omega^0\,dx,$$

da die Glieder mit $\delta\lambda_\varrho$ rechts von selbst wegfallen. Ist nun B eine quadratische Form mit den Koeffizienten $\beta_{\mu\nu} = \beta_{\nu\mu}$ und den Argumenten u_ν, A eine andere mit den Koeffizienten $\frac{\partial^2 F}{\partial y'_\mu \partial y'_\nu}$ und den Argumenten

$$\omega_\nu = u'_\nu + \alpha_{\nu 1} u_1 + \cdots + \alpha_{\nu n} u_n,$$

so macht *Clebsch* den Ansatz

$$(20) \quad \Omega(u_1, r) = A + B' + \sum_{\varrho=1}^{m} (r_\varrho + C_{\varrho 1} u_1 + \cdots + C_{\varrho n} u_n) \frac{\partial \Omega}{\partial r_\varrho},$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial r_\varrho} = \sum_{\nu=1}^{n} \omega_\nu \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y'_\nu};$$

da offenbar

$$\frac{\partial \Omega}{\partial r_\varrho} = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y_\nu} u_\nu + \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y'_\nu} u'_\nu \right), \quad \frac{\partial \Omega^0}{\partial r_\varrho} = 0,$$

so ist nach (20)

$$\delta^2 U_n = \int_a^b A^0\,dx,$$

$$(21) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} \omega_\nu^0 \frac{\partial \varphi}{\partial y'_\nu} = 0.$$

Die Transformation (20) beweist also, wenn sie möglich ist, folgendes. Das Vorzeichen $\delta^2 U_n$ ist bei den Bedingungsgleichungen $\delta\varphi_\varrho = 0$ konstant, wenn die Form A^0 bei den Bedingungen (21) ein konstantes Vorzeichen hat und nicht anders verschwindet, als wenn alle Grössen ω^0 verschwinden.

Die Gleichung (20) ergiebt nun durch Vergleichung der Koeffizienten von u und r

$$(22) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y_h \partial y_\varkappa} - \beta'_{h\varkappa} = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_h \partial y'_\nu} - \beta_{h\nu} \right) \alpha_{\nu\varkappa} + \sum_{\varrho=1}^{m} C_{\varrho\varkappa} \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y_h},$$

$$(23) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y_h \partial y'_\varkappa} - \beta_{h\varkappa} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial y'_\varkappa \partial y'_\nu} \alpha_{\nu 1} + \sum_{\varrho=1}^{m} C_{\varrho h} \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y'_\varkappa},$$

$$\frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y_h} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y'_\nu} \alpha_{\nu h}.$$

Die letzten beiden Systeme erlauben die Grössen α und C durch die β auszudrücken, während für letztere das Gleichungssystem (22) ebensoviele Differentialgleichungen erster Ordnung ergiebt, wie ihre Anzahl beträgt. Die Transformation (20) ist also möglich und hängt von $\frac{1}{2}n(n+1)$ willkürlichen Parametern ab. Diese Differentialgleichungen sind aber als integriert anzusehen, sobald die Gleichungen des Problems $\delta U_n = 0$, d. h. die Gleichungen (12) integriert sind. Enthalten nämlich die Lösungen der letzteren die Konstanten $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$, und sind γ neue Konstanten, so ist die allgemeine Lösung des Gleichungssystems

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u_\nu} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega}{\partial u_\nu'} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial r_\varrho} = 0 \tag{24}$$

folgende

$$\begin{aligned} u_\nu &= \gamma_1 \frac{\partial y_\nu}{\partial a_1} + \cdots + \gamma_{2n} \frac{\partial y_\nu}{\partial a_{2n}}, \\ r_\varrho &= \gamma_1 \frac{\partial \lambda_\varrho}{\partial a_1} + \cdots + \gamma_{2n} \frac{\partial \lambda_\varrho}{\partial a_{2n}}; \end{aligned} \tag{25}$$

denn wendet man das Zeichen δ auf die Gleichungen (12) an, so erhält man

$$\frac{\partial \Omega^0}{\partial \delta y_\nu} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega^0}{d\delta y_\nu'} = 0, \quad \frac{\partial \Omega^0}{\partial \delta \lambda_\varrho} = 0,$$

woraus sich das obige Resultat ergiebt, wenn man δ durch irgend ein Zeichen $\partial : \partial a$ ersetzt. Die Gleichungen (24) bestehen aber, wie man aus der Gleichung (20) sieht, auch wenn

$$\omega_\nu = 0, \quad r_\varrho + C_{\varrho 1} u_1 + \cdots + C_{\varrho n} u_n = 0. \tag{26}$$

Die Lösungen dieser Gleichungen sind daher auch in der Form (25) enthalten. Hat man n verschiedene Lösungen derselben, so kann man die Grössen α und C, mithin nach dem obigen auch die Grössen β berechnen.

Es bleibt also die Aufgabe übrig, n verschiedene Grössensysteme (25) und Grössen β so zu bestimmen, dass die Gleichungen (22), (23), (26) bestehen; möglich ist eine solche Bestimmung nach dem obigen sicher. Differenziert man nun die Gleichung (20) nach u_ν', so folgt aus der Annahme (26) und (24)

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Omega}{\partial u_\nu'} = \frac{\partial \Omega}{\partial u_\nu} = \beta_{\nu 1} u_1 + \beta_{\nu 2} u_2 + \cdots + \beta_{\nu n} u_n, \tag{27}$$

und umgekehrt folgen hieraus bei der über die Form A eingeführten Voraussetzung die Gleichungen (26) bei der Annahme (24). Es sind also n solcher Systeme zu finden, dass die letzten Gleichungen

$\beta_{\nu\mu} = \beta_{\mu\nu}$ ergeben und dabei, wenn jene Systeme durch $u_{1\nu}, r_{1\nu}$; $u_{2\nu}, r_{2\nu}$; ... bezeichnet werden, die Determinante $D = \sum \pm u_{11} u_{22} \cdots u_{nn}$ nicht verschwindet. Die Forderung $\beta_{\nu\mu} = \beta_{\mu\nu}$ erweist sich auf Grund der Gleichungen (27) als äquivalent mit der andern, dass allgemein

$$(28) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} \left(u_{\tau\nu} \frac{\partial \Omega_\sigma}{\partial u'_{\sigma\nu}} - u_{\sigma\nu} \frac{\partial \Omega_\tau}{\partial u'_{\tau\nu}} \right) = 0 \qquad (\sigma, \tau = 1, 2, \ldots, n)$$

sei, wenn Ω durch die Substitution $u_\nu = u_{\mu\nu}$, $r_\nu = r_{\mu\nu}$ in Ω_μ übergeht. Aus den Gleichungen (24) folgt übrigens leicht, dass für irgend zwei Integralsysteme u_ν die linke Seite der letzten Gleichung konstant ist.

Eine Methode, von den Gleichungen (28) ausgehend auf kürzerem Wege die Transformation (20) abzuleiten, hat *R. Lipschitz* für ein spezielleres Problem angegeben[82]). *Mayer* hat dieselbe[83]) auf die obige allgemeine Aufgabe angewandt und ihr folgende Form gegeben. Aus der Homogeneität der Funktion Ω folgt, dass die Formel

$$(29) \qquad 2\Omega(u, r) = \frac{d}{dx} \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu \frac{\partial \Omega}{\partial u'_\nu}$$

gilt, sobald u_ν, r_ϱ Lösungen der Gleichungen (24) sind. Sodann wird, wenn u_ν beliebig gegebene Funktionen von x sind, angesetzt

$$u_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu u_{\nu\mu}, \qquad r_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu r_{\nu\mu};$$

mittelst der Gleichung (29) wird Ω unter der Annahme, dass g_ν Konstante seien, gebildet und dann die aus der Variabilität dieser Grössen entspringende Modifikation angebracht. So ergiebt sich eine der Formel (20) äquivalente, in welcher

$$\omega_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} g'_\nu u_{\nu\mu} = u'_\mu - \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu u'_{\nu\mu};$$

dabei ist wegen der zweiten Gleichung (24)

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y'_\nu} u_\nu + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial y'_\nu} u'_\nu \right)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y'_\nu} \omega_\nu + \sum_{\sigma=1}^{n} g_\sigma \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y_\nu} u_{\sigma\nu} + \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y'_\nu} u'_{\sigma\nu} \right) = \sum_{\nu=1}^{n} \omega_\nu \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y'_\nu},$$

82) J. f. Math. 65 (1866), p. 26.
83) J. f. Math. 69 (1868), p. 237.

sodass, wenn $u_\nu = \delta y_\nu$ gesetzt wird, also $\delta \varphi_\varrho = 0$ ist, die Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \omega_\nu^0 \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y'_\nu} = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, m)$$

bestehen. *Lipschitz* giebt ferner für das von ihm behandelte Problem eine spezielle den Gleichungen (28) genügende Bestimmung der Konstanten γ_ν. Später hat *Mayer* gezeigt[84]), dass diese ganze Theorie ohne grosse Modifikationen gültig bleibt, wenn U_ν nicht durch eine Quadratur, sondern durch eine Differentialgleichung definiert ist (Nr. 8).

Clebsch[85]) giebt die allgemeinste Lösung der Gleichungen (28) vermittelst der verallgemeinerten *Jacobi-Hamilton*'schen Methode und zeigt, dass man immer setzen kann

$$\gamma_{\mu, n+\nu} = c_{1\nu}\gamma_{\mu 1} + c_{2\nu}\gamma_{\mu 2} + \cdots + c_{n\nu}\gamma_{\mu n} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei $c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu}$. Die Konstanten $\gamma_{\mu\nu}$ fallen dann aus den Ausdrücken $\beta_{\mu\nu}$ von selbst weg, und *Clebsch* erhält für diese sehr übersichtliche Determinantenausdrücke, die aus den Ableitungen von V zusammengesetzt sind und genau $\frac{1}{2}(n+1)n$ willkürliche Konstanten $c_{\mu\nu}$ enthalten, wie es zu erwarten ist. *Mayer*[86]) untersucht direkt die Verbindungen, in welchen die Grössen γ in den durch (27) definierten Ausdrücken $\beta_{\mu\nu}$ vorkommen und zeigt analog den spezielleren Resultaten von *Stern* (Nr. **14**), dass die Anzahl der unabhängigen unter diesen Verbindungen $\frac{1}{2}(n+1)n$ ist.

16. Das Vorzeichen von $\delta^2 U_n$ nach Mayer; konjugierte Punkte. Für das Transformationsproblem (20) genügt es, n bestimmte Systeme u_ν zu finden, welche den Gleichungen (28) genügen, und für D einen von Null verschiedenen Wert ergeben. Dies leistet *Mayer*[87]), indem er die Gleichungen

$$y_\nu = \bar{y}_\nu, \quad v_\nu = \frac{\partial \bar{F}}{\partial y'_\nu}, \tag{30}$$

in denen die Striche nach Nr. **11** zu deuten sind, nach $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ auflöst. Sind die erhaltenen Ausdrücke $(a_1), (a_2), \ldots$, so kann nach *Mayer* gesetzt werden

84) Leipz. Ber. 30 (1878), p. 22.
85) J. f. Math. 55 (1858), p. 344. S. a. *Frobenius* [Fussn. 78].
86) Beiträge [Fussn. 81], p. 32.
87) J. f. Math. 69, p. 249.

$$\gamma_{\mu\nu} = \left(\frac{\partial(a_\nu)}{\partial v_\mu}\right)_{x=x_1};$$

setzt man nämlich (a_ν) für a_ν in den Gleichungen (30) und differenziert die erhaltenen Identitäten nach y_ν und v_ν, so sieht man, dass für $x = x_1$ alle Grössen $u_{\mu\nu}$ verschwinden, womit die Gleichungen (28), deren linke Seiten von x nicht abhängen, bewiesen sind. Bei dieser Wahl der Grössen γ erhält man ferner

$$D = \left(\frac{\partial((a_1), (a_2), \ldots, (a_{2n}))}{\partial(y_1, \ldots, y_n, v_1, \ldots, v_n)}\right)_{x=x_1} \cdot \frac{\partial(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n, (\bar{y}_1)_{x=x_1}, \ldots, (\bar{y}_n)_{x=x_1})}{\partial(a_1, a_2, \ldots, \partial a_{2n})};$$

der zweite Faktor rechts wird durch $\Delta(x, x_1)$ bezeichnet.

Die Grösse D erscheint nun nach (27) als Nenner in den Ausdrücken β; die Gleichung (20) kann also nur dann zur Transformation von $\delta^2 U_n$ benutzt werden, wenn D in dem ganzen Intervall von a bis b von Null verschieden ist. Dies vorausgesetzt können aber die Grössen ω_ν^0 nur dann in dem ganzen bezeichneten Intervall verschwinden, wenn alle Grössen δy_n identisch verschwinden. Denn andernfalls hätten die Differentialgleichungen $\omega_\nu = 0$, deren allgemeine Lösungen in der Form

$$u_\nu = C_1 u_{1\nu} + C_2 u_{2\nu} + \cdots + C_n u_{n\nu}$$

dargestellt werden, ein System von Lösungen, welche an zwei Stellen gleichzeitig verschwänden, sodass an diesen Stellen $D = 0$ sein müsste, entgegen der Voraussetzung. Bei den für die Form A^0 und die Grösse D eingeführten Voraussetzungen ist also, wie *J. Richelot* bemerkt hat[88]), die Variation $\delta^2 U_n$ nur dann gleich Null, wenn alle Variationen von δy_ν identisch verschwinden. Hieraus ergiebt sich auf Grund der Bemerkungen am Anfang von Nr. **15** und der Gleichung (20) folgender Satz von *Mayer*[89]):

(I) Die quadratische Form $A = \sum \frac{\partial^2 F}{\partial y'_\mu \partial y'_\nu} \omega_\mu \omega_\nu$ sei für $a \leqq x \leqq b$ konstanten Zeichens und von Null verschieden, so lange die Argumente den Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y'_\nu} \omega_\nu = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, m)$$

unterworfen sind und nicht sämtlich verschwinden.

(II) Für $a < x \leqq b$ sei $\Delta(a, x)$ von Null verschieden.

---

88) *Mayer*, Beiträge [Fussn. 81], p. 52; J. f. Math. 69, p. 255.

89) Beiträge [Fussn. 81], p. 57. S. auch *G. von Escherich*, Wien. Ber. 97, II^a, p. 1416 (1888); 98, II^a, p. 1463 (1889).

Alsdann ist die Transformation von *Clebsch* (20) möglich; $\delta^2 U_n$ ist von Null verschieden und hat das Vorzeichen der Form A für alle Variationen, die den Bedingungsgleichungen $\delta\varphi_\varrho = 0$ genügen und an den Integrationsgrenzen, nicht aber identisch verschwinden.

Der Ausdruck $\Delta(a, b)$ hat aber eine Bedeutung unabhängig von der ganzen Transformationstheorie und ermöglicht es, einen Gedanken wieder aufzunehmen, der von *Jacobi* ausgesprochen, aber lange weit weniger als die in Nr. **13** erwähnten Entwicklungen formaler Natur beachtet worden ist. *Jacobi* sagt[90]), dass das Integral J_n aufhört ein Extremum zu sein, sobald die betrachtete Kurve, längs deren δJ_n verschwindet, die betrachtete Extremale, wie wir sagen wollen, mit einer ihr unendlich nahe benachbarten Extremale in zwei Punkten, welche dem Integrationsgebiet angehören, eine Berührung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung hat. Hier ist schon die Anschauungsweise der modernen Variationsrechnung in Gebrauch, welche darin besteht, dass man die Gesamtheit der den Differentialgleichungen des Problems genügenden Mannigfaltigkeiten oder Extremalen ins Auge fasst. *Jacobi* wendet seine Bemerkung an auf das Integral der Aktion bei der Planetenbewegung und hat dieses Beispiel sowie das der geodätischen Linien in seinen Vorlesungen ausführlich besprochen[91]). Nach einem misslungenen Versuch von *Eisenlohr*[92]) leitet *Hesse*[93]) das *Jacobi*'sche Resultat für $n = 1$ ab, wenigstens soweit es sich um das Zeichen der zweiten Variation handelt; er giebt folgende Bedingungsgleichung für zwei Punkte der angegebenen Beschaffenheit, deren Abscissen a und b sind:

$$\left[\frac{\partial y}{\partial a_1}\right]_{x=a} \cdot \left[\frac{\partial y}{\partial a_2}\right]_{x=b} - \left[\frac{\partial y}{\partial a_2}\right]_{x=a} \cdot \left[\frac{\partial y}{\partial a_1}\right]_{x=b} = 0; \tag{31}$$

er leitet sodann durch eine ganz einfache Rechnung aus der Differentialgleichung des Problems $\delta J_1 = 0$ ab, dass der Quotient $q = \frac{\partial y}{\partial a_1} : \frac{\partial y}{\partial a_2}$ den Sinn seiner Änderung beibehält, solange $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$ ein festes Zeichen besitzt, d. h. unter der Bedingung (I). Die Gleichung (31) kann also nur dann bestehen, wenn q in dem Intervall von a bis b alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ mindestens einmal durchläuft. Ist dies nicht der Fall, so kann man offenbar die Konstanten C_1 und C_2 (Nr. **13**) so bestimmen, dass u in dem ganzen Intervall nicht

90) Werke 4, p. 46.
91) Werke, Suppl. p. 46.
92) Untersuchungen [Fussn. 68], p. 15.
93) J. f. Math. 54 (1857), p. 259.

verschwindet, die *Legendre*'sche Transformation von $\delta^2 J_1$ also in der *Jacobi*'schen Form möglich ist.

Diese Resultate sind auf das Integral J_n sowie auf das einfachste isoperimetrische Problem von *C. E. Lundström*[94]) ausgedehnt worden, allerdings ohne völlig ausreichende Begründung; er hebt hervor, dass bei isoperimetrischen Problemen das Extremum dann aufhört, wenn der betrachtete Bogen in zwei Punkten mit einer unendlich nahen Extremale, d. h. den Differentialgleichungen des Problems genügenden Kurve, welche für das die isoperimetrische Bedingung liefernde Integral K_n zwischen jenen beiden Punkten bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung denselben Wert ergiebt, eine Berührung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung hat, sodass sich ein Analogon der Gleichung (31) ergiebt. Beim absoluten Extremum des Integrals J_n tritt an Stelle der Determinante (31) eine solche von der Ordnung $2n$, deren Elemente die für $x = a$ und $x = b$ genommenen Ableitungen der Grössen $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ nach den $2n$ Integrationskonstanten sind. Etwas verallgemeinert finden sich diese Resultate auch in einer späteren Arbeit von *Lundström*[95]).

Für das allgemeinste Problem des Integrals U_n bei beliebig vielen Bedingungsgleichungen schliesst *Mayer*[96]) schon vor *Lundström*'s Publikationen aus der Form der Grösse Δ als Funktionaldeterminante, dass, wenn $\Delta(a, x) = 0$, von den Mannigfaltigkeiten erster Ordnung im Gebiet der Grössen $x, y_1, \ldots, y_n$, welche den Differentialgleichungen des Problems genügen und die Wertsysteme $(a, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ und $(x, y_1, \ldots, y_n)$ enthalten, zwei im allgemeinen verschiedene zusammenfallen; diese nennt man nach *Weierstrass* konjugierte Punkte. Die Bedingung (II) kann also auch so formuliert werden: Das Integrationsgebiet darf keinen zu dem Anfangspunkt $(a, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ konjugierten Punkt enthalten.

Ist dagegen $\Delta(a, b) = 0$, so folgt aus der allgemeinen Beziehung der Grössen D und Δ zu einander, dass die Gleichungen (24) ein System von Lösungen zulassen, bei welchen alle Grössen u_ν für $x = a$ und $x = b$ verschwinden. Nach (29) ist aber, wenn $\delta y_\nu = \varepsilon u_\nu$ gesetzt wird, $\delta^2 U_n = 0$; dieses Resultat wird von gewissen Bemerkungen *Hesse*'s[97]) und *Jacobi*'s[98]) gestreift. Hieraus schliesst man leicht, dass

94) Utkast till isoperimetriska problemers fullständiga solution, Upsala 1866, p. 31, 98.

95) Distinction des maxima et des minima dans un problème isopérimétrique, Nova acta soc. Upsaliensis, (3) 7 (1869).

96) Beiträge [Fussn. 81], p. 60.

97) Werke, p. 451.

98) Werke, 4, p. 45.

wenn der zum Anfangspunkt konjugierte Punkt dem Integrationsgebiet nicht angehört, dasselbe kein Paar konjugierter Punkte enthält, da andernfalls $\delta^2 U_n$ auch bei den Bedingungen (I), (II) verschwinden könnte.

Da bei dieser ganzen Untersuchung die Grössen δy_ν an beiden Grenzen verschwinden sollten, sind Probleme der in Nr. 8 besprochenen Art ausgeschlossen. Für diese ist bis jetzt nicht nur keine hinreichende Bedingung des Extremums, sondern auch nichts über das Zeichen der zweiten Variation bekannt.

Bei isoperimetrischen Aufgaben vereinfacht sich, wie *Mayer*[99]) gezeigt hat, die Bedingung (I) und die Determinante $\Delta(a, x)$, wenn man die in diesem Falle konstanten Multiplikatoren und die gegebenen Werte der die Bedingungen ausdrückenden Integrale unter die Konstanten a_ν aufnimmt. Mit der von *Mayer* für diesen Fall abgeleiteten Form von $\Delta(a, x)$ im wesentlichen identisch ist die von *W. Howe*[100]), *G. Hormann*[101]), *R. Venske*[102]) nach *Weierstrass* angegebene.

Illusorisch würden diese Entwicklungen, wenn $\Delta(a, x)$ identisch verschwände. *Mayer* hat darauf hingewiesen, dass dies unmöglich ist, wenn das Problem $\delta U_n = 0$ bei gegebenen Grenzwerten im allgemeinen lösbar sein soll. Indessen fehlt noch eine genaue Angabe, welche Eigenschaften die Funktionen f, φ haben müssen, damit $\Delta(a, x)$ sicher nicht identisch gleich Null sei. Für $m = 0$ hat *L. Scheeffer* gezeigt, dass $\Delta(a, x)$ nicht identisch verschwindet[103]).

17. Die auf konjugierte Punkte bezügliche notwendige Bedingung des Extremums von J_1 nach Erdmann. *G. Erdmann*[104]) hat zuerst nachgewiesen, dass beim Integral J_1 ein Extremum sicher *nicht* vorhanden ist, sobald das Integrationsgebiet ein Paar konjugierter Punkte enthält. Es sei etwa $\Delta(a, x_0) = 0$, $a < x_0 < b$; da für das Integral J_1 der Quotient q (Nr. **16**) zwischen zwei konjugierten Punkten alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, folgt leicht, dass es einen Wert x_1 geben muss, für den $\Delta(x_1, b) = 0$, $a < x_1 < x_0$; und es sei $x_1 < x_2 < x_0$. Dann kann man die Grösse u (Nr. **13**) so bestimmen, dass sie für $x = a$ verschwindet, für $x = x_2$ den positiven Wert ε

99) Math. Ann. 13 (1878), p. 53.
100) Diss. Berlin 1887, p. 5.
101) Diss. Göttingen 1887, p. 10.
102) Diss. Göttingen 1891, p. 13.
103) Math. Ann. 25 (1885), p. 564.
104) Zeitschr. Math. Phys. (2) 23 (1878), p. 367.

annimmt, zwischen a und x_2 aber nicht verschwindet; ferner so, dass sie für $x = b$ verschwindet, für $x = x_2$ den Wert ε annimmt, zwischen x_2 und b aber nicht verschwindet; in letzterem Falle heisse sie $\bar{u}$. Dann setzt *Erdmann* $\delta y = \varepsilon u$ für $a \leqq x \leqq x_2$, $\delta y = \varepsilon \bar{u}$ für $x_2 \leqq x \leqq b$; die Formel (29) ergiebt dann, dass $\delta^2 J_1$ und $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2}$ entgegengesetzte Zeichen haben, J_1 also Inkremente verschiedenen Vorzeichens erhalten kann.

Auf verwandten Prinzipien beruht der Beweis dieses Resultats, welchen *Weierstrass* in seinen Vorlesungen gegeben hat[104a]).

Das Integral J_1 hört aber auch schon auf, ein Extremum zu sein, wenn die Endpunkte P_a und P_b des Integrationsgebiets konjugiert sind. *A. Kneser*[105]) hat nämlich gezeigt, dass die Schar der durch P_a gehenden Extremalen eine in P_b beginnende Enveloppe hat und dass das längs dieser, etwa von M bis N genommene Integral $\int f(x\, y\, y')dx$ gleich der Differenz der Integrale längs der Kurven $P_a M$ und $P_a N$ ist, welche der definierten Schar angehören. Hieraus folgt, dass immer beliebig nahe der ursprünglichen Kurve $P_a P_b$ gelegene Kurven vorhanden sind, längs deren das Integral $\int f dx$ genau den Wert J_1 annimmt.

18. Scheeffer's neue Methode; Ausdehnung des Satzes von Erdmann. *L. Scheeffer*[106]) betrachtet zuerst grundsätzlich die Gesamtheit aller „Minimalkurven", d. h. den Differentialgleichungen eines Problems genügenden einfachen Mannigfaltigkeiten oder, wie wir auch hier sagen, Extremalen, und wendet als neues Untersuchungsmittel die Konstruktion von Extremalen durch gegebene Punkte an. Allerdings sind bei der analytischen Durchführung die betrachteten Kurven nicht genau als Extremalen anzusehen, sondern weichen von solchen um Grössen höherer Ordnung im Verhältnis zu den Variationen ab. Diejenige Extremale, an der das Extremum eines Integrals J_n oder U_n untersucht werden soll, sei $\mathfrak{C}$. Eine von ihr unendlich wenig abweichende Extremale erhält man durch Variation der Konstanten a_ν, und hierdurch wird die Einführung der Grössen $\partial y_\mu : \partial a_\nu$ auf eine andere Weise als bei *Jacobi* und seinen älteren Nachfolgern (Nr. **13**) motiviert.

Scheeffer betrachtet nun folgende spezielle Variation δ_0 der

---

104a) *S. Kobb*, Acta math. 16, p. 111.
105 Math. Ann. 50 (1897), p. 27.
106) Math. Ann. 25 (1885), p. 522.

Kurve $\mathfrak{C}$. Es seien A_0, A_2 zwei ihrer Punkte, A_1 liege ihr unendlich nahe; für A_μ sei $x = x_\mu$, und $x_0 < x_1 < x_2$. Durch A_0 und A_1 werde eine, durch A_1 und A_2 eine andere Extremale gelegt, und $A_0 A_1 A_2$ als Abänderung der Kurve $\mathfrak{C}$ zwischen A_0 und A_2 betrachtet. Ist η_ν die Differenz der Werte, welche y_ν für $x = x_\nu$ auf $\mathfrak{C}$ und im Punkte A_1 annimmt, so hat man bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung eine der beiden Gleichungen

$$\delta_0 y_\nu = \sum_{\mu=1}^{2n} b_{\nu\mu} \frac{\partial y}{\partial a_\mu} = \Phi_\nu, \qquad \delta_0 y_\nu = \sum_{\mu=1}^{2n} c_{\nu\mu} \frac{\partial y}{\partial a_\mu} = \Psi_\nu,$$

je nachdem $x_0 < x < x_1$ oder $x_1 < x < x_2$, und die Konstanten b, c sind durch folgende Forderungen bestimmt: für $x = x_0$ verschwinden alle Φ_ν, für $x = x_2$ alle Ψ_ν, und für $x = x_1$ ist $\Phi_\nu = \Psi_\nu = \eta_\nu$. Diese Bestimmung ist möglich, wenn $\Delta(x_0, x_1)$ und $\Delta(x_1, x_2)$ nicht verschwinden. Die Ausdrücke Φ_ν und Ψ_ν genügen als Funktionen von x_0 bei passender Wahl von r_ϱ, für u_ν gesetzt, den Gleichungen (24); setzt man ferner

$$u_{\tau\nu} = \Phi_\nu, \quad u_{\sigma\nu} = \Psi_\nu,$$

so bestehen die Gleichungen (28), da ihre linken Seiten für das Argument x_0 verschwinden. Überhaupt sind die Grössen Φ_ν mit den von *Lipschitz* und *Mayer* betrachteten Grössen u_ν (Nr. **15**) identisch, wenn man in diesen x_1 für x setzt. Nach Formel (29) reduziert sich $\delta_0^2 U_n$ auf den integrierten Teil; lässt man x_1 gegen den zu x_0 konjugierten Punkt $\bar{x}_0$ konvergieren, so zeigt die Ausrechnung, dass $\delta_0^2 U_n \cdot \Delta(x_0, x_1)$ sich einer im allgemeinen nicht verschwindenden Grösse unbegrenzt annähert, und zwar einer und derselben, gleichviel ob $\lim (x_1 - \bar{x}_0) = \pm 0$. Ändert also $\Delta(x_0, x_1)$ für $x_1 = \bar{x}_0$ sein Zeichen, so gilt dasselbe von $\delta_0^2 U_n$, und U_n ist in dem Intervall von x_0 bis x_2 sicher kein Extremum. Soll also U_n ein Extremum sein, so darf $\Delta(a, x)$ für $a < x \leq b$ sein Zeichen jedenfalls nicht wechseln. Ersetzt man daher das Verschwinden durch den Wechsel des Zeichens, so wird (II) eine notwendige Bedingung des Extremums.

Ebenso sucht *Scheeffer* die Notwendigkeit der Bedingung (I) darzuthun, indem er A_1 festhält, A_0 und A_2 aber zusammenrücken lässt, wodurch sich $\delta_0^2 U_n$ auf die Form $\int \sum \frac{\partial^2 F}{\partial y'_\mu \partial y'_\nu} \eta_\mu \eta_\nu$ reduziert. Indessen sind bei der so modifizierten Variation die Grössen $\delta y'_\nu$ nicht mehr sicher kleine Grössen, was implicite bei allen bisherigen Betrachtungen vorausgesetzt wird, sodass dieser Teil von *Scheeffer*'s Untersuchung einer Ergänzung bedarf[107]).

107) Math. Ann. 25, p. 570.

Liegt ferner A_1 auf einer Kurve $A_0 A_2$, welche als Variation von $\mathfrak{C}$ betrachtet werden kann und der Variation $\delta y_\nu = \eta_\nu$ entspricht, so zeigt der erwähnte Ausdruck von $\delta_0^2 U_n$ in Verbindung mit einer Rechnung, die mit der *Mayer-Lipschitz*'schen (Nr. **15**) identisch ist, dass die Differenz der zweiten Variationen längs beider Bögen $A_0 A_1$ folgende Form hat:

$$\delta^2 \int_{x_0}^{x_1} f\,dx - \delta_0^2 \int_{x_0}^{x_1} f\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \sum \frac{\partial^2 F}{\partial y_\nu' \partial y_\mu'}\, \omega_\nu\, \omega_\mu ,$$

wobei

$$\omega_\nu = \frac{d\eta_\nu}{dx_1} - \left(\sum_{\mu=1}^{2n} b_{\nu\mu} \frac{d}{dx} \frac{\partial y_\nu}{\partial a_\mu} \right)_{x=x_1}$$

und für diese Grössen aus denselben Gründen wie in Nr. **15** die Gleichungen (21) gelten. Führt man eine ähnliche Betrachtung für die beiden Bögen $A_1 A_2$ durch, so hat man eine anschauliche Deutung für die Transformation der zweiten Variation in die spezielle Form von *Mayer* (Nr. **16**), wodurch diese vor der allgemeineren Transformation von *Clebsch* bevorzugt erscheint.

19. Kritische Untersuchungen; Inbegriff der Variationen. In den von Nr. **12** an besprochenen Arbeiten gilt es, soweit vom Extremum eines Integrals J_n oder U_n die Rede ist, für selbstverständlich, dass der Zuwachs des Integrals bei Variation der unbekannten Funktionen, wenn die erste Variation verschwindet, das Vorzeichen der zweiten Variation besitzt; ist dieses konstant, so folgert man, dass das Integral wirklich ein Extremum besitzt. Noch *Scheeffer* glaubt durch die Betrachtung der zweiten Variation die Bedingungen (I) und (II) als hinreichend für das Extremum nachgewiesen zu haben, weist aber in einer zweiten Arbeit[108]) nachdrücklich darauf hin, dass auch wenn die zweite Variation ein konstantes Zeichen hat und nur verschwindet, wenn alle δy_ν identisch verschwinden, das Extremum noch nicht als gesichert angesehen werden kann. Der Fehlschluss der gewöhnlichen Argumentation beruht auf folgendem. Variiert man z. B. bei dem Integral J_1 eine Extremale in der speziellen von *Euler* (Nr. **5**) angegebenen Weise, indem man y durch $y + \varepsilon u$ ersetzt, so erhält man für verschiedene Werte der Konstanten ε eine Schar benachbarter Kurven. Innerhalb dieser Schar ist, wenn die zweite Variation konstantes Vorzeichen besitzt, ein Extremum von J_1 für die Extremale gesichert, da die zweite Variation den Wert

108) Math. Ann. 26 (1886), p. 197.

$$\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2 J_1}{\partial \varepsilon^2}\right)_{\varepsilon=0}$$

besitzt, $\partial J_1 : \partial \varepsilon$ aber für $\varepsilon = 0$ verschwindet. Aber hieraus folgt noch nicht, dass J_1 auch innerhalb der Gesamtheit aller denkbaren Scharen ein Extremum ist; es könnte sein, dass man immer von einer Schar zu einer anderen übergehend eine Reihe von Kurven konstruierte, welche sich der Extremale unbegrenzt annäherten und das Zeichen des Zuwachses von J_1 von dem Zeichen der zweiten Variation verschieden machten. Dies trifft bei einem von *Scheeffer* gegebenen Beispiel wirklich ein, und zwar wenn man wie gewöhnlich δy und $\delta y'$ als kleine Grössen ansieht (s. u.).

Eine zweite kritische Bemerkung *Scheeffer*'s bezieht sich auf die Natur der Variationen δy_ν; er hebt angeregt durch *Weierstrass* hervor, dass ebenso wie die Variationen selbst, auch ihre Ableitungen $\delta y_\nu'$ als kleine Grössen anzusehen sind, wenn die Variationsrechnung bestehen soll. *Euler*, *Lagrange* und ihre nächsten Nachfolger haben diese Voraussetzung als selbstverständlich angesehen und stillschweigend eingeführt, indem sie z. B. setzen

$$\delta f(x, y, y') = \frac{\partial f}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\,\delta y';$$

denn nur bei kleinen Inkrementen aller variierten Grössen kann man mit dem Zeichen δ nach den Regeln des Differentialzeichens operieren. *Legendre* [109]) zeigt, dass man beim Problem der Rotationsfläche kleinsten Widerstandes zu einer durch die gewöhnlichen Regeln erhaltenen Extremale eine ihr beliebig nahe verlaufende Zickzacklinie konstruieren kann, längs deren das betrachtete Integral kleiner wird als längs der Extremale, während die zweite Variation positiv ist. *Todhunter* [110]) hat zuerst allgemein bemerkt, dass die Voraussetzung, $\delta y'$ sei klein, den Begriff der zulässigen Variationen und damit des Extremums *spezialisiere*, und dass diese Voraussetzung in der Variationsrechnung gemacht werden müsse; er betrachtet ebenfalls an Beispielen Variationen, bei denen die Grössen $\delta y'$ endlich sind, und weist darauf hin, dass die erhaltenen Resultate denen der Variationsrechnung widersprechen können. Derartige Widersprüche erklären sich dadurch, dass der Begriff des Extremums einerseits in der Variationsrechnung, andrerseits bei speziellen Untersuchungen von der Art der *Legendre*'schen, verschiedenen Inhalt hat. Dieser Begriff hängt davon

109) Ostwald's Klass. 47, p. 72.

110) Researches in the calculus of variations, London und Cambridge 1871, p. 169, 269; History p. 3, 426. Vgl. *Euler*, Inst. calc. int. 3, p. 407 (ed. II).

ab, mit was für „benachbarten" Mannigfaltigkeiten man die gesuchte vergleicht. Vergleicht man z. B. den Wert von J_1 längs einer Kurve mit dem Wert längs einer andern, deren Punkte den entsprechenden (Nr. 4) der ersteren nahe liegen, während die Tangenten entsprechender Punkte endliche Winkel bilden können, und verlangt, dass die Differenz der Werte von J_1 längs der beiden Kurven ein vorgeschriebenes Zeichen habe, so hat man den weiteren, von *Weierstrass* (Nr. **21**) untersuchten Begriff des Extremums. Verlangt man dagegen, dass in entsprechenden Punkten die Tangenten nahezu parallel seien, so kommt man auf den gewöhnlichen, engeren Begriff, der in der Variationsrechnung zu Grunde gelegt wird und werden muss, wenn nicht der Formalismus der Variationsrechnung zusammenbrechen und schon die Formeln (1) ihre Gültigkeit verlieren sollen. Für den Fall des Integrals J_n hat *E. Zermelo*[111]) die verschiedenen Arten von Nachbarschaft systematisch unterschieden.

Ob man Extrema der engern oder weitern Art betrachten will, ist natürlich zunächst freigestellt. In vielen Fällen entscheidet die Natur der Extremumsaufgabe selbst darüber; z. B. hat *F. August*[112]) gezeigt, dass bei dem Problem der Fläche kleinsten Widerstandes die physikalische Bedeutung der Aufgabe verlangt, die Variationen, bei denen $\delta y'$ nicht klein ist, und damit die *Legendre*'sche Zickzacklinie auszuschliessen. Ebenso führen die dynamischen Anwendungen der Variationsrechnung mit Notwendigkeit auf die speziellere Variationsart, da die Geschwindigkeiten ebenso wie die Koordinaten kleine Änderungen erfahren. Die geometrischen Extremumsaufgaben haben im allgemeinen bei beiden Variationsarten einen Sinn.

20. Hinreichende Bedingungen des Extremums von J_1 nach Scheeffer. *L. Scheeffer*[113]) hat in einer früheren Arbeit, ebenso wie dem Anschein nach *Weierstrass*[114]), die Theorie der zweiten Variation deshalb für mangelhaft erklärt, weil die allgemeinere Variationsart sich ihr entzieht. Sodann hat *Scheeffer* aber bemerkt (Fussn. 108), dass jene Theorie auch bei der spezielleren Variationsart in ihrer älteren Form nicht ohne weiteres hinreichende Bedingungen des Extremums ergiebt, und hat solche für J_1 aus der *Jacobi*'schen Form der zweiten Variation nach einer neuen Methode abgeleitet. Aus dieser Form folgt zunächst, wenn $u\xi = \delta y$ gesetzt wird, und c^2 eine von δy unabhängige, positive Konstante bedeutet,

111) Untersuchungen p. 28.
112) J. f. Math. 103 (1888), p. 22.
113) Math. Ann. 25 (1885), p. 594.
114) *Schwarz*, Ges. math. Abh. 1, p. 235.

$$|\delta^2 J_1| > c^2 \int_a^b \xi'^2\, dx.$$

Ist nun R_3 der nach den quadratischen Gliedern folgende Rest in der nach δy und $\delta y'$ fortschreitenden *Taylor*'schen Entwicklung von $f(x, y+\delta y, y'+\delta y')$, sind ferner c_1 und c_2 Konstante, so hat man

$$|R_3| < c_1 (|\xi| + |\xi'|)(\xi^2 + \xi'^2),$$

$$\left| \int_a^b R_3\, dx \right| < c_1 (\xi_0 + \xi_0') \left\{ \int_a^b \xi^2\, dx + \int_a^b \xi'^2\, dx \right\},$$

wobei ξ_0, ξ_0' die oberen Grenzen von ξ und ξ' sind. Weiter beweist *Scheeffer* das Lemma

$$\int_a^b \xi^2\, dx \leqq \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \int_a^b \xi'^2\, dx$$

für willkürliche Funktionen ξ; daraus folgt

$$\left| \frac{1}{\delta^2 J_1} \int_a^b R_3\, dx \right| < c_2 (\xi_0 + \xi_0'). \tag{32}$$

Die Grössen ξ_0, ξ_0' werden aber unendlich klein, wenn dies von den oberen Grenzen der Grössen δy, $\delta y'$ gilt; da nun die genaue Gleichung

$$\int_a^b f(x, y+\delta y, y'+\delta y')\, dx = J_1 + \frac{1}{2}\delta^2 J_1 + \int_a^b R_3\, dx$$

besteht, so lehrt die Gleichung (32), dass der Zuwachs des Integrals das Zeichen der zweiten Variation hat, sobald δy, $\delta y'$ im ganzen Integrationsgebiet hinlänglich klein genommen werden. Damit sind für das Integral J_1 die Bedingungen (I), (II) als hinreichend für das Bestehen eines Extremums im gewöhnlichen, engeren Sinne nachgewiesen. Dasselbe Ziel erreicht *Kneser* [115]) für das engere Extremum des Integrals U_n (m beliebig) auf Grund der Theorie der Transformation der zweiten Variation mittelst der von *Lagrange* (Nr. **12**) gegebenen Modifikation der *Legendre*'schen Theorie.

Hier werde noch auf einige verfehlte oder ergänzungsbedürftige Versuche, hinreichende Bedingungen des Extremums abzuleiten, hingewiesen. *C. E. Lundström* [116]) sucht die Bedingungen (I), (II) (Nr. **16**) für den Fall des Integrals J_n ohne die Transformation der zweiten Variation abzuleiten; er beweist, indem er die Ordnungen der Kleinheit von

115) Math. Ann. 51 (1898), p. 321.

116) Fussn. 94, p. 28; Fussn. 95, p. 10, 20.

δy und $\delta y'$ vergleicht, dass bei hinreichend engem Integrationsintervall die Vorzeichen von $\delta^2 J_n$ und $\frac{\partial^2 f}{(\partial y^{(n)})^2}$ übereinstimmen. Dass dies aber auch noch gilt, solange das Intervall den zum Anfangspunkt konjugierten nicht umfasst, wird nur bewiesen vermittelst der keineswegs selbstverständlichen Annahme, es gebe, wenn man an einer bestimmten Stelle a zu integrieren beginnt, eine erste Stelle a_1 von der Beschaffenheit, dass die zweite Variation des von a bis a_1 erstreckten Integrals J_n verschwinden kann, ohne dass δy identisch verschwindet. Auf sehr ähnlichen Bahnen bewegen sich die Versuche von *E. Culverwell*[117]) und *B. Turksma*[118]). *W. Jermakoff*[119]) geht aus von der verallgemeinerten *Jacobi-Hamilton*'schen Methode; er untersucht aber nicht, in welchem Umfang die Lösungen der partiellen Differentialgleichungen existieren; die Bedingung (II) tritt infolge dessen garnicht auf, während doch ihre Notwendigkeit nach *Scheeffer* und *Erdmann* feststeht.

21. Hinreichende Bedingungen nach Weierstrass; das isoperimetrische Problem im engeren Sinne. *K. Weierstrass*[120]) sieht x und y als Funktionen eines Parameters t an, wodurch es ermöglicht wird, auch solche Kurven ins Auge zu fassen, längs deren y nicht eine eindeutige Funktion von x ist. Es wird dabei eine willkürliche Funktion eingeführt, und gewisse Ausdrücke müssen als von dieser unabhängig nachgewiesen werden, was *Zermelo*[121]) für den Fall des Integrals J_n durchgeführt hat. Bei der folgenden Darstellung ist von dieser formalen Neuerung abgesehen und die bisherige Bezeichnung beibehalten.

Weierstrass geht, um eine hinreichende Bedingung des Extremums zu erhalten, von der Betrachtung des Aggregats

$$(A_0 A_1) + \overline{(A_1 A_2)} - (A_0 A_2) \tag{33}$$

aus, wobei die Klammer $(A_\mu A_\nu)$ den Wert des gegebenen Integrals U_n bedeutet, wenn man längs der die A_μ und A_ν verbindenden Ex-

117) Lond. Trans. 178 (1888), p. 95; Proc. London math. soc. 23 (1892), p. 241.

118) De eerste en tweede variatie van enkelvoudige integraalen en hare toepassing op het beghinsel van Hamilton en dat der kleinste werking, Amsterdam 1894, p. 18, 22.

119) Kiew Univ.-Nachr. 31, September 1891.

120) *Zermelo,* Untersuchungen [Fussn. 19]; *Harris Hancock,* Annals of math. 9 (1895/96), p. 180; 10, p. 81; 11, p. 20; *Mayer,* Leipz. Ber. 48 (1896), p. 438.

121) *Zermelo,* Untersuchungen p. 2.

tremale integriert, die überstrichene Klammer die analoge Bedeutung hat, wenn man längs einer beliebigen A_0 und A_2 verbindenden Kurve $\mathfrak{C}'$ integriert. Speziell wird der Fall ins Auge gefasst, dass A_1 an A_2 unendlich nahe heranrückt, sodass die Extremale A_0A_1 als Variation von A_0A_2 mit Verschiebung des einen Endpunktes angesehen werden kann. Wendet man die *Euler*'sche Variationsformel (4) an und setzt längs der Kurve $\mathfrak{C}'$ allgemein $dy_\nu : dx = p_\nu$, so ergiebt sich

$$(A_0A_1) - (A_0A_2) = \left[\delta x\left(F + \sum_{\nu=1}^{n}(p_\nu - y'_\nu)\frac{\partial F}{\partial y'_\nu}\right)\right]_{x=x_2}.$$

Nun ist offenbar

$$-\overline{(A_1A_2)} = [\delta x F(x, y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n)]_{x=x_2},$$

also

$$(A_0A_1) + \overline{(A_1A_2)} - (A_0A_2) = (\overline{E}\,\delta x)_{x=x_2},$$

wenn gesetzt wird

$$\overline{E} = F(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n) - F(x, y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n)$$
$$-\sum_{\nu=1}^{n}(y'_\nu - p_\nu)\frac{\partial F(x, \ldots, y'_1 \ldots y'_n)}{\partial y'_\nu}.$$

Liegt nun A_1 irgendwo auf der Kurve $\mathfrak{C}'$ und ist A_1' der auf dieser von A_1 nach A_0 hin benachbarte Punkt, so kann man die letzte Formel auf das Aggregat

$$(A_0A_1') + \overline{(A_1'A_1)} - (A_0A_1)$$

anwenden, welches als Differential der Grösse (33) angesehen werden kann, wenn A_1 längs der Kurve $\mathfrak{C}'$ von A_2 nach A_0 hin läuft. Ist daher die Grösse $\overline{E}\,\delta x$ konstanten Zeichens, so gilt dasselbe von dem bezeichneten Differential und der Grösse (33), mithin auch, wenn A_1 in die Lage A_0 rückt, von der Differenz

$$\overline{(A_0A_2)} - (A_0A_2) = \delta\int_{x_0}^{x_2} f\,dx.$$

Da nun $\mathfrak{C}'$ nur dann als Variation der Extremale A_0A_2 oder $\mathfrak{C}$ auftreten kann, wenn

(34) $\qquad \varphi_\varrho(x, y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n) = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, m);$

da ferner die Konstruktion der Extremalen A_0A_1 nur dann eindeutig bestimmt ist, wenn $\mathfrak{C}$ zwischen A_0 und A_2 kein Paar konjugierter Punkte enthält, so schliesst *Weierstrass*: wenn die Grösse $\overline{E}\,\delta x$ unter der Voraussetzung (34) längs des betrachteten Extre-

malenstücks ein konstantes Zeichen hat und die Bedingung (II) erfüllt ist, so ist ein Extremum sogar im weiteren Sinne vorhanden; denn es wird nicht benutzt, dass in entsprechenden Punkten von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ die entsprechenden Grössen $dy_\nu : dx$ wenig von einander abweichen.

Nimmt man dagegen an, die Differenzen $p_\nu - y'_\nu$ seien klein, womit man auf den gewöhnlichen, engeren Begriff des Extremums zurückkommt, so läuft das *Weierstrass*'sche Kriterium auf die beiden Bedingungen (I), (II) hinaus. Denn unter dieser Voraussetzung ist δx stets negativ, und man kann offenbar entwickeln:

$$\overline{E} = -\sum_{\mu,\nu} \frac{\partial^2 F(x\,y\,y')}{\partial y'_\mu \partial y'_\nu} (p_\mu - y'_\mu)(p_\nu - y'_\nu) + \cdots,$$

wobei die weggelassenen Glieder in den Grössen $p_\nu - y'_\nu$ von mindestens dritter Dimension sind, und die Gleichungen (34) ergeben in Verbindung mit den gegebenen Gleichungen $\varphi_\varrho(x, \ldots, y'_n) = 0$

$$0 = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\varrho(x\,y\,y')}{\partial y'_\nu} (p_\nu - y'_\nu) + \cdots,$$

wobei die weggelassenen Glieder in den Grössen $p_\nu - y'_\nu$ von mindestens zweiter Dimension sind. Die Grösse $\overline{E}$ hat also jetzt ein konstantes Zeichen, sobald die Bedingung (I) erfüllt ist; die Bedingungen (I), (II) wären somit als hinreichend für das Eintreten des Extremums nachgewiesen.

Eine authentische Darstellung dieser *Weierstrass*'schen Untersuchungen liegt nicht vor[121a]); *Zermelo* (Fussn. 19) hat sie für den Fall des Integrals J_n durchgeführt. Die Hauptschwierigkeiten, welche bei einer solchen Darstellung zu überwinden wären, dürften folgende sein: 1) der Nachweis, dass die Extremalen $A_0 A_1$ konstruiert werden können, oder dass die Determinante Δ nicht identisch verschwindet; 2) der Nachweis, dass $\overline{E}$ nicht längs einer Kurve $\mathfrak{C}'$ überall verschwinden kann. Übrigens betrachtet *Weierstrass* nicht direkt die Grösse $\overline{E}$, sondern eine davon durch einen gewissen Faktor unterschiedene Grösse E, welche für J_1 so definiert wird, dass die Grösse (33), wenn A_1 unendlich nahe bei A_2 liegt, und ds das Bogenelement der Kurve $\mathfrak{C}'$ ist, den Wert $E\,ds$ erhält.

Beispiele (U_2, $m = 1$) für die *Weierstrass*'sche Methode giebt *H. A. Schwarz*[122]); in seinem Beweis des Satzes, dass der Kreis

121a) Auf Vorlesungshefte ist im vorliegenden Referat keine Rücksicht genommen, da dies für den Leser ohne Nutzen wäre, ausserdem auch die handschriftliche Tradition sehr unsicher ist.

122) Gött. Nachr. 1884, Ges. Abh. 2, p. 327.

kleineren Umfang hat als jede geschlossene Linie von gleichem Flächeninhalt, kommt die Methode dadurch zur Geltung, dass, wenn A_0A_2 ein Bogen der variierten Kurve ist, ein Kreisbogen A_0A_1 konstruiert wird, der mit seiner Sehne dieselbe Fläche wie der erstgenannte Bogen A_0A_2 einschliesst; eine analoge Konstruktion wird benützt beim Beweis des Satzes, dass unter den Rotationsflächen gegebenen Volumens die Kugel die kleinste Fläche hat.

Weierstrass hat übrigens bewiesen[123]), dass bei J_1 die Grösse E nicht konstanten Zeichens sein kann, wenn $f(x, y, y')$ eine rationale Funktion von y' ist. In diesem Falle, der offenbar beim Problem der Rotationsfläche kleinsten Widerstandes eintritt, kann also nur von einem Extremum im engeren Sinne die Rede sein. Für $n > 1$ gilt der Satz nicht mehr, wie *Zermelo* zeigt.

22. Höhere Variationen; hinreichende Bedingungen bei variablen Grenzen. Die bisher besprochenen hinreichenden Bedingungen des Extremums beziehen sich auf den Fall fester Integrationsgrenzen und lehren nichts, wenn es sich darum handelt, das Extremum bei variablen, gewissen Bedingungen unterworfenen Grenzwerten zu sichern. Notwendige Bedingungen auch für diesen Fall hat schon *Lagrange* (Nr. 3) aufstellen gelehrt; *Todhunter*[124]) scheint zuerst den Zuwachs, der unendlich klein zweiter Ordnung ist, bei variablen Grenzen in einem speziellen Falle explicite aufgestellt zu haben. *Lundström*[125]) hat sodann ohne völlig ausreichende Begründung die hinreichenden Bedingungen des Extremums bei variablen Grenzen angegeben. Später hat man den Algorithmus der höheren Variationen herangezogen.

Offenbar kann die Variation irgend einer Grösse δu als eine Funktion von x angesehen und selbst wieder variiert werden, d. h. vermehrt um eine willkürliche Funktion von x, die im Verhältnis zu δu selbst klein ist und durch $\delta^2 u$ bezeichnet wird; ebenso kann man von dieser eine im Verhältnis zu ihr kleine Variation $\delta^3 u$ bilden u. s. f. Die Operationsregeln für das wiederholte Zeichen δ werden dann ebenso wie für das einfache mit denen des Differentialzeichens identisch sein. Eine klare und zugleich hinreichend allgemeine Erörterung dieses Begriffs der höheren Variationen scheint trotz mancher Diskussionen[126]) nicht vorzuliegen. *Erdmann*[127]) giebt

123) *Zermelo,* Untersuchungen [Fussn. 19], p. 62.

124) History, p. 330.

125) S. Fussn. 95, p. 24.

126) *Schnuse,* Einleitung der Übersetzung von *Jellett.*

127) Zeitschr. Math. Phys. 22 (1877), p. 324; 23 (1878), p. 370; 26 (1881), p. 75.

eine Erörterung auf Grund des in Nr. 5 erwähnten speziellen Begriffs der einfachen Variation und setzt

$$\delta^k u = \frac{\partial^k u}{\partial t^k}\, dt^k,$$

womit die Operationsregeln gesichert sind. Man erhält so z. B., wenn $\delta x = 0$:

$$\delta^2 J_1 = \delta \int_a^b dx \left(\frac{\partial f}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\,\delta y'\right)$$

$$= \int_a^b dx \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\delta y^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'}\,\delta y \delta y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\,\delta y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\,\delta^2 y + \frac{\partial f}{\partial y'}\,\delta^2 y'\right\};$$

die mit $\delta^2 y$, $\delta^2 y'$ behafteten Glieder lassen sich aber durch partielle Integration wegschaffen, wenn $\delta J_1 = 0$, sodass in diesem Falle die zweite Variation von J_1 dieselbe Bedeutung hat, wie bisher.

Im Fall variabler Grenzen erhält *Erdmann* für $\delta^2 J_1$ einen komplizierteren Ausdruck; die Verallgemeinerung für das Integral U_n hat *Mayer*[128]) gegeben. *Erdmann* führt die bei der *Jacobi-Hesse*'schen Transformation (Nr. **13**) gebräuchlichen Grössen ein, und leitet mit Hülfe des so erhaltenen Ausdrucks von $\delta^2 J_1$ hinreichende Bedingungen des Extremums bei variablen Grenzen ab. Er wendet seine Methode mit Erfolg an auf das Beispiel einer Kurve gegebener Länge, welche mit einer festen Kurve einen extremen Flächenraum einschliessen soll, während der Endpunkt auf der festen Kurve nach Belieben gewählt werden kann; ferner auf das Problem der kürzesten Linie zwischen gegebenen Kurven. Eine etwas speziellere Fassung gab *Mayer*[129]) der Aufgabe des Extremums bei variablen Grenzwerten, indem er unter allen Extremalen, die den Grenzbedingungen genügen, diejenige sucht, welche das Integral zum Extremum macht. In dieser Fassung hat man im Grunde ein Problem des gewöhnlichen Extremums vor sich, dessen Lösung, wie *Mayer* zeigt, durch Benutzung der *Jacobi-Hamilton*'schen Methode erleichtert werden kann. *Erdmann* hat diese schon früher erwähnte Problemstellung beanstandet[130]); in der That liefert eine Extremale noch nicht mit Sicherheit ein Extremum unter allen Kurven überhaupt, wenn sie unter allen Extremalen ein Extremum ergiebt. Später hat *Mayer*[129]) die Aufgabe auch in der allgemeineren Fassung betrachtet und hin-

128) Leipz. Ber. 36 (1884), p. 29.
129) Leipz. Ber. 48 (1896), p. 436.
130) Zeitschr. Math. Phys. (2) 23, p. 362.

reichende Bedingungen des Extremums abgeleitet; es sind dieselben wie sie sich bei der spezielleren Aufgabe ergeben. *Mayer* betrachtet u. a. das Beispiel der Kurve gegebener Länge, deren Schwerpunkt möglichst tief liegt, während einer ihrer Endpunkte einer gegebenen Kurve angehört. Dass man bei der Ableitung dieser Kriterien vom Zeichen der Glieder zweiter Dimension auf das des ganzen Zuwachses schliesst, ist in demselben Umfang wie beim gewöhnlichen Extremum berechtigt.

Die Betrachtungen *Erdmann*'s über höhere Variationen, um über das Extremum bei einem durch zwei konjugierte Punkte begrenzten Extremalenstück zu entscheiden, können nicht als völlig ausreichend angesehen werden aus denselben Gründen, wie die älteren Untersuchungen über die zweite Variation (Nr. 19).

23. Steiner's Sätze über Figuren extremen Flächeninhalts; diskontinuierliche Lösungen. *J. Steiner*[131]) hat die isoperimetrische Aufgabe im engeren Sinne nach fünf verschiedenen geometrischen Methoden behandelt, von denen die zweite und dritte auf den mit elementaren Mitteln ableitbaren Extremumseigenschaften der in und um den Kreis beschriebenen Polygone, die übrigen auf den Symmetrieeigenschaften des Kreises beruhen. Alle diese Methoden geben ein Verfahren, eine nicht kreisförmige Figur des gegebenen Umfangs zu verkleinern, zeigen aber nicht, dass die fortgesetzte Wiederholung dieses Verfahrens konvergiert, d. h. zu einer bestimmten Grenzfigur führt, ein Mangel, der übrigens z. B. bei der vierten Methode leicht zu heben sein dürfte. *Steiner* behandelt dann eine grosse Anzahl von Aufgaben, in denen das Minimum des Inhalts bei gegebenem Umfang unter der Voraussetzung gewisser Schranken gesucht wird, d. h. es wird festgesetzt, dass die gesuchte Kurve ein gewisses Gebiet nicht überschreiten, oder mit gewissen Linien Teile oder einzelne Punkte gemein haben soll. Eine spezielle Aufgabe dieser Art hat schon *Legendre*[132]) mittelst der Variationsrechnung behandelt. *Steiner* bestätigt an allen von ihm behandelten Aufgaben eine Gruppe von Sätzen, die er ohne Beweis ausgesprochen hatte[133]), indem er statt des gewöhnlichen isoperimetrischen Problems die Aufgabe nimmt, auf einer beliebigen Fläche die Kurve kürzesten Umrings zu konstruieren, d. h. die Kurve, deren Umfang bei gegebener Fläche mini-

131) J. f. Math. 18 (1839), Werke 2, p. 75; J. de math. (1) 6; J. f. Math. 24, Werke 2, p. 177, 243.

132) Ostwald's Klass. Nr. 47, p. 76.

133) Berl. Ber. 1839, Werke 2, p. 165.

mal ist. Diese Kurven hatte vor *Steiner* schon *F. Minding*[134]) behandelt, und mit Benutzung der *Gauss*'schen krummlinigen Koordinaten durch Variationsrechnung gezeigt, dass die gesuchten Kurven konstante geodätische Krümmung besitzen. Die allgemeinen *Steiner*schen Sätze sind nun folgende. Wenn auf irgend einer Fläche eine Figur von gegebenen Umfang und maximalem Inhalt die Seiten irgend eines krummlinigen Polygons nicht überschreiten soll, aber mit ihnen Punkte oder Strecken gemein haben darf, so sind die freien Teile des Umfangs der gesuchten Linie Kurven kürzesten Umrings mit gleichen Werten der konstanten geodätischen Krümmung; jede Seite des Vielecks wird von den an sie stossenden freien Teilen der gesuchten Kurve berührt oder unter gleichen Winkeln geschnitten; und zwar tritt, was *Steiner* bei allen Beispielen bestätigt, Berührung ein, wenn die Kurve durch ein endliches Stück mit der Vielecksseite zusammenfällt. In der Ebene sind natürlich die Kurven kürzesten Umrings Kreisbögen, deren Radius das Reziproke ihrer geodätischen Krümmung ist; ebenso auf der Kugelfläche, für welche *Steiner* ebenfalls Beispiele behandelt.

Minding[135]) hat für die auf Rotationsflächen abwickelbaren Flächen ein erstes Integral der Gleichung der Kurven kürzesten Umrings abgeleitet; er behandelt ferner die Aufgabe, die geschlossene Kurve kürzesten Umrings bei gegebener Fläche zu konstruieren, die verschiedenen Beschränkungen unterworfen wird, z. B. innerhalb einer von zwei Breitenkreisen begrenzten Zone der Rotationsfläche liegen, oder zum Teil gegeben sein soll; die erhaltenen Resultate können als Bestätigung der *Steiner*'schen Sätze angesehen werden. *Minding* beweist ferner[136]), indem er die Kurven kleinsten Umrings als Gleichgewichtsfiguren eines unausdehnbaren Fadens bei einer zur Fläche tangential, zum Faden normal wirkenden konstanten Kraft ansieht, die *Steiner*'schen Sätze, ohne jedoch den Fall zu betrachten, dass die Kurve kürzesten Umrings und die Polygonseite einen von Null verschiedenen Winkel bilden, und dehnt die bei den Rotationsflächen durchgeführten Betrachtungen auf alle Flächen aus, für welche man eine Schar geschlossener Linien kürzesten Umrings kennt.

Todhunter[137]) hat für eine Reihe von Einzelaufgaben des Extremums isoperimetrische und andere Untersuchungen durchgeführt,

134) J. f. Math. 5 (1830), p. 297.

135) Petersb. Bull. 21 (1876), p. 252; 24 (1877), p. 328; 25, p. 190. Mélanges math. 5.

136) J. f. Math. 86 (1879), p. 279.

137) Researches [Fussn. 110].

welche den *Steiner*'schen analog sind, indem er davon ausgeht, dass schon wenn Anfangs- und Endpunkt gegeben sind, oft eine sie verbindende Extremale nicht konstruiert werden kann. Dasselbe gilt noch mehr, wenn Beschränkungen anderer Art vorliegen, z. B. Schranken, welche nicht überschritten werden sollen. Er versucht in solchen Fällen durch Kombination verschiedener Extremalen ein Extremum zu erreichen; die erhaltenen Kurven sind im allgemeinen diskontinuierlich, d. h. mindestens einige der Unbekannten oder ihrer Ableitungen haben einzelne Unstetigkeiten. Ohne die den *Steiner*'schen analogen Sätze anders als teilweise und induktiv zu erhalten, hebt er doch[138]) als den allgemeinen analytischen Charakter der Extremumsaufgaben mit Beschränkungen hervor, dass die Variationen der Unbekannten wenigstens streckenweise, z. B. an den Schranken, Ungleichungen unterworfen sind, wodurch die in Nr. 6 besprochenen Schlüsse ihre Gültigkeit verlieren. In einigen Aufgaben[138a]) wird auch der Begriff des Extremums dadurch beschränkt, dass die gefundene Kurve nur mit andern verglichen wird, in denen die Konkavität nach derselben Seite gerichtet ist u. dgl.

E. Heine[139]) hat als von *Weierstrass* herrührend den Satz angegeben, dass wenn δJ_n verschwinden soll und man längs einer diskontinuierlichen Kurve integriert, die Grössen $R_0, R_1, \ldots$ (Nr. 4) in jeder Unstetigkeitsstelle stetig bleiben müssen. Für $n = 1$ also würde dies von der einen Grösse $\partial f : \partial y'$ gelten. *Erdmann*[140]) hat sodann bewiesen, dass für $n = 1$ die beiden Grössen

$$\frac{\partial f}{\partial y'}, \quad f - y' \frac{\partial f}{\partial y'}$$

stetig sein müssen; seine Argumentation geht über die von *Heine* gegebene hinaus, indem er nicht, wie dieser, δx in den Unstetigkeitsstellen $= 0$ setzt. Natürlich gelten seine Schlüsse nur, wenn blos eine endliche Anzahl von Unstetigkeiten zugelassen werden. — Derselbe Satz findet sich in den Mittheilungen von *Harris Hancock*[141]) über *Weierstrass*' Untersuchungen in etwas modifizierter Form. *Erdmann* behandelt ferner die Aufgabe, J_1 zu einem Minimum zu machen, wenn die gesuchte Kurve auf ein gewisses Gebiet beschränkt bleiben soll. Dieses werde dadurch definiert, dass in ihm die Gleichung $y = \varphi(x, z)$ für z reelle Werte ergebe, sodass $\varphi'(z) = 0$ die Glei-

138) Researches, p. 14.
138a) Researches, p. 76.
139) Math. Ann. 2, p. 190.
140) J. f. Math. 82 (1877), p. 21.
141) Ann. of math. 11, p. 31.

chung der Grenzlinie ist; dann kann die gestellte Aufgabe dadurch ersetzt werden, dass man das Extremum des Integrals

$$\bar{J}_1 = \int f(x, \varphi(x, z), \varphi'(x))dx$$

aufsucht, dessen Extremalen durch die Gleichung

$$\varphi'(z)\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

definiert werden, in welcher man y durch $\varphi(x, z)$ ersetzt. Indem er auf diese Gleichung den erwähnten Satz anwendet, schliesst *Erdmann*, dass die Lösung der Aufgabe aus Stücken der Grenzkurve und Extremalen des Integrals J_1 zusammengesetzt sein müsse, und dass zwei endlich ausgedehnte Linienstücke dieser beiden Arten sich berühren müssen, wo sie zusammentreffen. Die Angaben über den Fall, dass zwei Extremalenstücke in einem Punkt der Grenzlinie zusammentreffen, sind nicht vollständig. Für die Sicherung der ganzen Argumentation wären über das analytische Verhalten von $\varphi(x, z)$ in den betrachteten Wertsystemen genauere Voraussetzungen zu machen. Für die kürzeste Linie in einem beliebig begrenzten Flächenstück hat *Darboux* [142]) eine Reihe von Sätzen bewiesen, speziell dass ein der kürzesten Linie angehöriges Begrenzungsstück von dem sich anschliessenden geodätischen Bogen berührt wird.

Weierstrass [143]) scheint aus der Definition des Zeichens E (Nr. **21**) folgenden Satz abgeleitet zu haben. Es seien AB und CB zwei Extremalenstücke eines Integrals J_1 mit isoperimetrischer Bedingungsgleichung $K_1 = \text{const.}$, B ein Punkt der Begrenzung; die Sinus der Winkel, welche die Begrenzung in B mit den Bögen BA und BC macht, verhalten sich, wenn die Kurve ABC das Integral zum Extremum macht, wie die Grössen E, die man im Punkte B für AB erhält, indem man p durch die Richtung BC, und für CB, indem man p durch die Richtung BA definiert. Damit ist ein bisher noch nicht vollständig erledigter Teil der *Steiner*'schen Sätze verallgemeinert. *Weierstrass* scheint ferner bewiesen zu haben, dass ein Extremalenstück, wenn es mit einem Stück der Grenzlinie zusammen das Integral zum Extremum macht, dieses Stück berühren muss, d. h. dass der von *Erdmann* aufgestellte Satz auf isoperimetrische Aufgaben übertragen ist.

24. Mehrfache Integrale; Transformation der ersten Variation. Bei Doppelintegralen, welche über eine unbekannte Fläche erstreckt

142) Théorie générale des surfaces, 3, p. 106 f. S. auch *E. B. Christoffel*, Berl. Abh. 1868, p. 129.

143) Vgl. *Kobb*, Acta math. 17 (1893), p. 343.

werden und bei den analogen Aufgaben für höhere Mannigfaltigkeiten ist die Fragestellung und der Zusammenhang zwischen dem Extremum und dem Verschwinden der ersten Variation derselbe wie bei einfachen Integralen, doch sind die meisten Darstellungen hier noch weniger streng. *Lagrange*[144]) bildet die Variation eines Doppelintegrals, wenn z eine unbekannte Funktion von x und y und p, q ihre ersten Ableitungen sind, unter der Annahme $\delta x = \delta y = 0$, d. h. es wird die variierte Fläche auf die ursprüngliche durch Parallele zur z-Axe eindeutig bezogen. Alsdann ist das Zeichen δ mit dem der partiellen Differentiation nach x und y vertauschbar, und man erhält, da die zweite Formel (1) auch für Doppelintegrale gilt,

$$(35)\qquad \delta J = \delta \iint dx\,dy\, f(x, y, z, p, q)$$
$$= \iint dx\,dy\,dz \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)\right)\delta z$$
$$+ \iint dx\,dy\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\,\delta z\right) + \iint dx\,dy\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\,\delta z\right),$$

wobei die Differentiation nach x und y auch auf z, p, q, δz erstreckt wird.

Wird nun die Projektion der Fläche auf die Ebene $z = 0$ von den Linien $y = \text{const.}$ in den Punkten 1 und 2 getroffen, so hat man in leicht verständlicher Bezeichnung:

$$(36)\qquad \iint dx\,dy\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\,\delta z\right) = \int dy \left\{\left(\frac{\partial f}{\partial p}\,\delta z\right)_2 - \left(\frac{\partial f}{\partial p}\,\delta z\right)_1\right\};$$

dieser Ausdruck verschwindet, wenn δz an der Grenze des Integrationsgebiets verschwindet, ähnliches gilt vom letzten Gliede der rechten Seite in (35), und eine Argumentation analog der in Nr. **6** angedeuteten ergiebt als notwendige Bedingung des Extremums

$$(37)\qquad H = \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right) = 0.$$

Nach einem misslungenen Versuch von *Euler*[145]) hat *Poisson*[146]) die Variation des Integrals J ohne die Voraussetzungen $\delta x = \delta y = 0$ gebildet, indem er x, y, z als Funktionen von zwei der Variation nicht unterworfenen Parametern u, v ansieht, sodass die Zeichen $\partial : \partial u$ und $\partial : \partial v$ mit δ vertauschbar sind. Er erhält auf diese Weise ein Analogon der *Euler*'schen Formel (4), und zwar auch für den Fall, dass Ableitungen beliebig hoher Ordnung vorkommen.

144) Oeuvres 1, p. 353.
145) Inst. calc. int., Appendix § 141, p. 464 (ed. II).
146) Par. Mém. 12 (1832), p. 290, 294.

Gauss[147]) bringt zuerst die Glieder von der Form (36) für spezielle Integrale, darunter das Oberflächenintegral, in eine zur Diskussion geeignete Form, sodass die Betrachtung der Extrema bei variablen Integrationsgrenzen möglich wird. Er führt eine bestimmte Fortgangsrichtung auf der Begrenzungslinie ein; hierdurch gelingt es ihm, die beiden Glieder auf der rechten Seite der Gleichung (36) auf dieselbe Form zu bringen und das ganze Integral in ein längs der Begrenzungslinie in der festgesetzten Richtung erstrecktes umzuwandeln. Es ist dies eine von *Gauss* vielfach angewandte Betrachtung, welche auch den *Green*'schen Umwandlungen von Flächenintegralen in Linienintegrale (II A 2, Nr. 45) zu Grunde liegt. *Poisson* (Fussn. 146) führt die *Gauss*'sche Betrachtung für allgemeine Integrale J durch und untersucht die Folgerungen, die man allgemein aus der Gleichung $\delta J = 0$ bei variablen Grenzen ziehen kann, z. B. wenn die Grenzlinie auf einer gegebenen Fläche liegen soll, und stellt Schätzungen darüber an, inwiefern die bei der Integration der Gleichung (37) auftretenden willkürlichen Funktionen durch Grenzbedingungen bestimmt werden. Er betrachtet den Fall, dass unter dem Integralzeichen $dx\,dy$ mit dem Quadrat der mittleren Krümmung multipliziert ist; ein etwas allgemeineres Integral tritt in *Poisson*'s Theorie der elastischen Platte auf, welche von *Kirchhoff* (s. Nr. 26) erweitert und berichtigt ist. — *Ostrogradsky*[148]) dehnt *Poisson*'s Untersuchungen, besonders auch die Verwandlung von Integralen verschiedener Vielfachheit in einander auf Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimensionen aus. Mit der formalen Umgestaltung der ersten Variation vielfacher Integrale beschäftigen sich ausgedehnte Untersuchungen von *Sarrus*[149]) und *Cauchy*[150]) sowie eine Note von *Lindelöf*[151]).

25. Zweite Variation und hinreichende Bedingungen des Extremums von Doppelintegralen. Versuche, *hinreichende* Bedingungen des Extremums abzuleiten, sind nur für den Fall einer festen Grenze des Integrationsgebiets angestellt. *V. Brunacci*[152]) hat die Untersuchung von *Legendre* (Nr. 12), und zwar in der ihr von *Lagrange* gegebenen Modifikation, auf das Doppelintegral J übertragen. Unter der Annahme (37) hat man offenbar

147) Gott. Comm. 7, Werke 5 (1830), p. 60.
148) J. f. Math. 15 (1839), p. 332.
149) Par. sav. [étr.] 10 (1848), p. 1.
150) Exercices d'anal. et de phys. math. 3 (1844), p. 50.
151) Par. C. R. 50 (1860), p. 85.
152) Memorie dell' istituto nazionale italiano 2 (1810), p. 121.

$$\Delta = \iint f(x, y, z+\delta z, p+\delta p, q+\delta q)\,dx\,dy - J$$
$$= \iint dx\,dy\left(\tfrac{1}{2}\varphi + R\right),$$

wobei φ eine quadratische Form von δz, δp, δq bedeutet und R die Variationen nur in mindestens dritter Dimension enthält. *Brunacci* addiert nun zu Δ die Grösse

$$\iint dx\,dy\left(\frac{\partial(\alpha\,\delta z^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\beta\,\delta z^2)}{\partial y}\right),$$

welche $= 0$ ist, da δz am Rande des Integrationsgebiets, welches natürlich dasselbe wie bei J sein soll, verschwindet. Es ergiebt sich so

$$\Delta = \iint dx\,dy\left(\tfrac{1}{2}\psi + R\right),$$

wobei ψ eine quadratische Form derselben Argumente wie φ ist; setzt man

$$D_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}, \quad D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\frac{\partial^2 f}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial q}\right)^2,$$
$$D_2 = D_1\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial q} + \beta\right)^2$$
$$+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial q}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial q} + \beta\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial p} + \alpha\right) - \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial p} + \alpha\right)^2,$$

so ist die Form ψ definit positiv oder negativ, je nachdem das erste oder zweite der folgenden Ungleichungssysteme gilt:

(38) $\quad D_0 > 0,\ D_1 > 0,\ D_2 > 0; \quad D_0 < 0,\ D_1 > 0,\ D_2 < 0.$

Da D_2 die Determinante der Form ψ ist und nicht verschwindet, so kann man, was *Brunacci* nicht ausführt, zeigen, dass Δ und ψ dasselbe Zeichen haben, J also ein Extremum ist. Man hat also, wenn $D_1 > 0$, α und β als stetige Funktionen so zu bestimmen, dass $D_0 D_2 > 0$, was offenbar bei hinreichender Beschränkung des Integrationsgebiets möglich ist. Mit der Untersuchung von *Brunacci* stimmt die von *Delaunay*[153]) im wesentlichen überein, erstreckt sich aber auch auf den Fall, dass der Integrand höhere Ableitungen enthält.

Clebsch[154]) bringt die zweite Variation auf eine zur Beurteilung des Zeichens geeignete Form, indem er die quadratische Form im Integranden durch eine andere von weniger Argumenten ersetzt. Für das obige Integral J kann man setzen:

---

153) J. éc. polyt. 17, cah. 29 (1843), p. 90.
154) J. f. Math. 55 (1858), p. 270.

$$\iint dx\,dy\,\varphi(\delta z,\ \delta p,\ \delta q)$$
$$= \iint dx\,dy \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta z}{m}\right)^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial q\,\partial p}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta z}{m}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\delta z}{m}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\delta z}{m}\right)^2 \right\},$$

wenn für m folgende Bedingungsgleichung besteht:

$$0 = -m\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial p} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial q}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial q}\frac{\partial m}{\partial y}\right)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q\,\partial p}\frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\frac{\partial m}{\partial y}\right), \tag{39}$$

deren rechte Seite aus δH entsteht, wenn man m für δz setzt. Sie hat daher die Lösung

$$m = \sum_\nu C_\nu \frac{\partial z}{\partial c_\nu},$$

wenn z der Gleichung (37) genügt und die Konstanten c_ν enthält; C_ν sind weitere Konstanten. Die zweite Variation ist also unter den Voraussetzungen $D_0 > 0$, $D_1 > 0$ sicher positiv, sobald eine im ganzen Integrationsgebiet nicht verschwindende Grösse m existiert. Die Kurve $m = 0$ auf einer der Gleichung (37) genügenden Fläche, welche demnach der Umfang des Integrationsgebiets nicht erreichen darf, wenn das Zeichen der zweiten Variation nicht unsicher werden soll, kann also als Schnitt zweier benachbarter, der Gleichung (37) genügender Flächen angesehen werden und entspricht den konjugierten Punkten bei einfachen Integralen. — In einer weiteren Abhandlung[155]) bringt *Clebsch* die zweite Variation eines beliebig vielfachen Integrals mit beliebig vielen Unbekannten und Bedingungsdifferentialgleichungen auf eine zur Beurteilung des Zeichens geeignete Form; er verfolgt einen ähnlichen Gedankengang, wie bei den einfachen Integralen. Auf eine andere, den *Lipschitz-Mayer*'schen Entwicklungen (Nr. **15**) verwandte Art hat *Sabinin*[156]) die Resultate von *Clebsch* abgeleitet.

G. Kobb[157]) führt in das Integral J die *Poisson*'schen Parameter u, v ein, sodass z nicht eine im ganzen Integrationsgebiet eindeutige Funktion von x und y zu sein braucht. Er stellt hinreichende Bedingungen des Extremums auf, von denen die ersten beiden mit den Bedingungen von *Brunacci* (38) identisch sind, die letzte aber verlangt, dass eine gewisse Grösse E, welche der für einfache Integrale von *Weierstrass* (Nr. **12**) eingeführten analog ist, ein konstantes Zeichen haben soll. Es ist aber zu bezweifeln, ob diese Bedingung

155) J. f. Math. 56, p. 122.
156) Petersb. Bull. 15 (1871), p. 70.
157) Acta math. 16, p. 65; 17 (1892/93), p. 321.

für den von *Kobb* betrachteten Fall etwas besonderes verlangt; es werden nämlich nur Variationen betrachtet, bei welchen in entsprechenden Punkten die Tangentialebenen der ursprünglichen und der variierten Fläche einander nahe liegen, und für den hierdurch definierten Begriff des Extremums sind die Bedingungen von *Brunacci* allein schon hinreichend. — *Kobb* weist ferner den Zusammenhang der Gleichungen $D_2 = 0$ und (39) nach, woraus leicht geschlossen wird, dass $D_2 > 0$, wenn eine im Integrationsgebiet positive Lösung der Gleichung (39) existiert. Der Zusammenhang zwischen der rechten Seite dieser Gleichung und H (s. o.) führt ferner auf Grund einer der Formel (14) analogen Darstellung der zweiten Variation zu dem Satze, dass diese sowohl positiv wie negativ werden, ein Extremum also nicht vorhanden sein kann, wenn das Integrationsgebiet eine geschlossene Kurve $m = 0$ umfasst. — In einer zweiten Abhandlung giebt *Kobb* einen strengen Beweis der Multiplikatorregel für den Fall, dass ein Integral derselben Form wie J einen gegebenen Wert haben und dann J zum Extremum gemacht werden soll; dieser Beweis ist dem in Nr. **9** erwähnten *Scheeffer-Weierstrass*'schen verwandt. *Kobb* überträgt ferner die *Weierstrass*sche Verallgemeinerung eines *Steiner*'schen Satzes (Nr. **23**) auf Doppelintegrale.

Schon *Lagrange*[158]) hat die Methode der Variationen auf das Integral des Flächeninhalts angewandt und die partielle Differentialgleichung der Minimalflächen aufgestellt. Ein Bericht über die ausgedehnte Theorie derselben gehört nicht hierher[159]). Die Frage, wann eine Minimalfläche ein Minimum der Fläche liefert, ist von *H. A. Schwarz* behandelt[160]). Er bringt die zweite Variation des Inhalts einer Minimalfläche durch passende Wahl der unabhängigen und abhängigen Variablen auf die Formen

$$\iint d\xi\, d\eta \left(\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2 - \frac{8 w^2}{(1+\xi^2+\eta^2)^2} \right)$$
$$= \iint d\xi\, d\eta \left(\left(\frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{w}{\psi}\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{w}{\psi}\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)^2 \right),$$

wobei ψ eine Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{8\psi}{(1+\xi^2+\eta^2)^2} = 0 \tag{40}$$

ist und w am Rande des Integrationsgebiets verschwindet. Diese

158) Oeuvres 1, p. 353.
159) *Darboux*, Surfaces 1, p. 267.
160) Berl. Ber. 1872, ges. Abh. 1, p. 151.

Transformation ist der von *Clebsch* gegebenen (s. o.) offenbar verwandt, indem sie wie diese die Zahl der Quadrate unter dem Integralzeichen vermindert. Hat man eine im Integrationsgebiet nicht verschwindende Grösse ψ, so ist die zweite Variation positiv. In einer späteren Arbeit[161]) hebt *Schwarz* hervor, dass aus dem Zeichen der zweiten Variation nicht mit Sicherheit auf das Eintreten des Minimums geschlossen werden könne, und beweist, dass ein Minimalflächenstück einen minimalen Inhalt hat verglichen mit allen benachbarten Flächen, welche dieselbe Randlinie haben und aus einer endlichen Anzahl analytischer Flächen zusammengesetzt sind, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: das betrachtete Minimalflächenstück kann in eine Schar ihm beliebig nahe kommender Minimalflächenstücke eingebettet werden, von denen je zwei einander unendlich nahe in ihrer ganzen Ausdehnung stets um unendlich kleine Strecken gleicher Ordnung abstehen. Die hierzu führende Betrachtung ist eine Anwendung der in Nr. **21** besprochenen Methode von *Weierstrass* auf den Fall des Flächenintegrals. *Schwarz* stellt sodann eine eingehende Untersuchung über die Integration einer allgemeinen Klasse partieller Differentialgleichungen an, zu denen die Gleichung (40) gehört, und über die Bedingungen, unter denen diese Gleichungen ein in einem gegebenen Bereich nicht verschwindendes Integral besitzen. *Schwarz*[162]) und *A. Otte*[162a]) haben ferner die Frage nach dem Eintreten des Minimums an verschiedenen speziellen Fällen untersucht[162]). Dass bei variablen Grenzen sogar der Flächeninhalt einer Minimalfläche in gewissem Sinne ein Maximum sein kann, hat *Steiner*[163]) bemerkt.

26. Übersicht der Beispiele und Anwendungen. Als reichhaltigste Sammlung von der Variationsrechnung zugänglichen Extremumsaufgaben ist noch heute *Euler*'s klassisches Werk zu nennen. Sodann sind eine Abhandlung von *K. Schellbach*[164]) und eine schon erwähnte Arbeit von *Lundström* (Fussn. 94) zu erwähnen; unter den Lehrbüchern neueren Datums steht das von *Moigno* und *Lindelöf* oben an. *Schellbach* benutzt allerdings nicht den Formalismus der Variationsrechnung, sondern Infinitesimalbetrachtungen von der in Nr. **2** erwähnten Art; er betrachtet auch eine Anzahl von Problemen mit variablen Grenzwerten, geht aber nirgends über die Aufstellung

161) Fenn. acta 15 (1885), ges. Abh. 1, p. 222.
162) Gött. Abh. 34 (1887), ges. Abh. 1, p. 270.
162a) Diss. Göttingen 1894.
163) Berl. Ber. 1840, Werke 2, p. 176.
164) J. f. Math. 41 (1851), p. 293.

notwendiger Bedingungen hinaus, während *Lundström* mehrfach Ansätze zur Ableitung hinreichender Bedingungen macht. Ausführliche Monographien der Brachistochrone und verwandter Probleme lieferten *J. N. Haton de la Goupillière*[165]) und *E. Vicaire*[166]). Wir erwähnen noch die isoperimetrischen Aufgaben von *S. Rumowski*[167]), *H. Kiessling*[168]) und *G. Darboux*[169]). Ohne eine Zusammenstellung der bisher bearbeiteten Einzelaufgaben[170]) zu versuchen, können wir dieselben, abgesehen von den rein analytischen, welche bisher keine grosse Bedeutung gewonnen haben, in drei Gruppen anordnen: die geometrischen, diejenigen mechanischen, in denen durch die Extremumsforderung ein zu den Daten des mechanischen Vorgangs gehöriges funktionales Verhältnis bestimmt wird, und diejenigen mechanischen, in welchen der Bewegungs- oder Gleichgewichtszustand durch ein Extremum wie das der potentiellen Energie, Aktion oder des *Hamilton*'schen Integrals definiert wird. Bei den ersten beiden Gruppen ist die Thatsache des Extremums von vornherein der Gegenstand des Interesses und die Ableitung notwendiger und hinreichender Bedingungen direkt gefordert. Bei der dritten Gruppe handelt es sich zunächst darum, aus dem Verschwinden der ersten Variation eines begrifflich einfachen Integrals die Differentialgleichungen des mechanischen Vorgangs abzuleiten; die Aufstellung hinreichender Bedingungen des Extremums wird erst erforderlich, wenn man dazu übergeht, die Stabilität des Gleichgewichts- oder Bewegungszustandes zu untersuchen.

Bei den Aufgaben der ersten beiden Gruppen ist die Bestimmung der konjugierten Punkte und damit die Aufstellung hinreichender Bedingungen des Extremums nur in verhältnismässig wenigen Fällen durchgeführt, z. B. von *L. Lindelöf*[171]) für die Kettenlinie als Meridian der kleinsten Rotationsfläche und für die gewöhnliche Brachistochrone, von *Dienger*[172]) für die Rotationsfläche kleinsten Widerstandes, von *Lundström* (Fussn. 95) und *Mayer*[173]) für die Kettenlinie als Linie tiefsten Schwerpunktes bei gegebener Länge, von *Howe* und *Hormann* (Fussn. 100, 101) für die kleinste Rotationsfläche gegebenen

165) Par. sav. [étr.] 27 (1883) Nr. 4; 29 (1884).
166) Par sav. [étr.] 31 (1885).
167) Petrop. N. comm. 8 (1763), p. 189.
168) Progr. Berlin 1866.
169) Surfaces 3 (1894), p. 149.
170) Ein Verzeichnis giebt *Pascal* p. 190.
171) *Moigno-Lindelöf*, p. 209, 231.
172) Grundriss p. 25.
173) Math. Ann. 13 (1878), p. 65.

Volumens, von *Venske*[174]) für einen speziellen Fall der kürzesten Raumkurve von konstanter erster Krümmung, von *Todhunter*[175]) und *Sonin* (Fussn. 56) für das Integral $\int yf(y')dx$, und einige andere Aufgaben, wobei aber *Todhunter* unvollständig ist und fehlerhafte allgemeine Behauptungen aufstellt[176]). Vom isoperimetrischen Problem im engeren Sinne ist in Nr. **21** und **23** die Rede gewesen. Für die geodätischen Linien, welche auch als Lösung einer Aufgabe der dritten Gruppe auftreten, hat *O. Bonnet*[177]) gezeigt, dass die konjugierten Punkte durch die Nullstellen der Integrale der Gleichung

$$\frac{d^2u}{ds^2} + \varkappa u = 0$$

bestimmt werden, wenn $\varkappa$ das Krümmungsmass, s den geodätischen Bogen bedeutet. Daraus folgt, dass wenn längs einer geodätischen Linie das Krümmungsmass negativ ist, überhaupt kein Paar konjugierter Punkte vorhanden sind, wie auch *Jacobi* in seinen Vorlesungen ohne Beweis bemerkt[178]). Ferner untersucht diese Punkte *E. B. Christoffel*[179]), für Flächen zweiter Ordnung *Jacobi*[180]) und *H. von Mangoldt*[181]).

Zu der dritten der bezeichneten Gruppen gehört erstens jede Aufgabe der Statik, in welcher es sich um das Gleichgewicht einer stetigen, in ihrer Gestalt veränderlichen Mannigfaltigkeit materieller Punkte handelt; hier fordert das Prinzip der virtuellen Verschiebungen, dass das Integral einer linearen Form von Variationen gleich Null gesetzt werde. Nachdem im Anschluss an *D. Bernoulli Euler*[182]) die Gestalt einer elastischen Feder durch Extremumsbetrachtungen bestimmt hatte, wandte *Lagrange*[183]) seine Methode der Variationsrechnung auf die Statik der biegsamen und elastischen Fäden sowie der Flüssigkeiten an; bei letzteren[184]) ist seine Anwendung der Multiplikatormethode bis heute noch nicht ausreichend begründet, da eine Differentialgleichung zwischen den Variationen selbst als Bedingung

174) Diss. Gött. 1881, p. 24.
175) Researches, p. 28.
176) Researches, p. 95.
177) Par. C. R. 40, p. 1311; 41 (1855), p. 32.
178) Werke 7, p. 72.
179) Berl. Abh. 1868.
180) Werke, Suppl. p. 47.
181) J. f. Math. 91, p. 23. Das. weitere Litteratur.
182) Meth. inv. p. 245, Additam. I.
183) Oeuvres 11, p. 77, 145 ff.
184) Oeuvres 11, p. 210.

vorgeschrieben wird, während die Anwendung jener Methode auf einfache Mannigfaltigkeiten durch die neueren Untersuchungen im allgemeinen zu rechtfertigen sein dürfte. Hierher gehört auch die Untersuchung von *Gauss* (Nr. 24) über Kapillarität. — Ein Extremumsproblem liegt nur dann vor, wenn ein durch die Lage des Punktsystems allein bestimmter Ausdruck der potentiellen Energie vorhanden ist. Ist diese in der Gleichgewichtslage ein Minimum, so ist das Gleichgewicht stabil; die Bestimmung der konjugierten Punkte würde also zur Beurteilung der Stabilität nöthig sein. Es scheint aber diese Untersuchung nur da durchgeführt zu sein, wo die statische Aufgabe mit einer der oben erwähnten Aufgaben der ersten beiden Gruppen zusammenfällt.

Ein Problem der Dynamik gehört zur dritten Gruppe, sobald man die Bewegungsgleichungen aus dem Prinzip der kleinsten Aktion oder dem *Hamilton*'schen Prinzip ableitet. Ersteres, vielleicht schon von *Leibniz* aufgestellt, erscheint in seiner engeren Form bei *Euler*[185]) für den Fall der Bewegung eines Punktes, allgemein bei *Jacobi*[186]); in dieser Form setzt es die Existenz eines von der Zeit unabhängigen Potentials voraus und reduziert die Bestimmung der Bahnkurven eines dynamischen Problems, wie *R. Lipschitz*[187]) eingehend erörtert, auf die Bestimmung der geodätischen Linien in einer Mannigfaltigkeit von gegebenem Bogenelement, wobei die Länge dem Aktionsintegral entspricht. *W. Thomson* und *P. Tait*[188]) haben diese Anschauung für spezielle Fälle benutzt.

Lagrange[189]) hat dem Prinzip der kleinsten Aktion eine weitere Form gegeben, bei welcher kein Potential zu existieren braucht. Das Verhältnis der weiteren zur engeren Form des Prinzips der kleinsten Aktion ist vielfach diskutiert; wesentlich ist für erstere, wie *O. Rodrigues*[190]) zuerst betont hat, dass die Zeit variiert werden muss, was in den Entwicklungen von *Lagrange* nicht zum Ausdruck kommt, ihnen aber auch nicht widerspricht. *Mayer*[191]) hat den Zusammenhang der beiden Formen mit einander und dem *Hamilton*'schen Prinzip klargelegt, indem er zeigte, dass bei einem sehr allgemeinen Variationsproblem drei diesen Prinzipien entsprechende Ansätze ge-

185) Meth. inv. p. 311, Additam. II.
186) Werke, Suppl. p. 41.
187) J. f. Math. 74 (1872), p. 116.
188) Treatise on natural philosophy 1^1, §§ 358—361, p. 428 (ed. II).
189) Oeuvres 1, p. 376; 11, p. 315.
190) Correspondance sur l'école polytechnique 3, p. 159.
191) Leipz. Ber. 38 (1886), p. 343.

macht werden können. *O. Hölder*[191a]) hat beide Prinzipien aus einer allgemeinen, dem *d'Alembert*'schen Prinzip äquivalenten Formel durch Spezialisierung der Variationen abgeleitet, und den Begriff der variierten Bewegung genauer erörtert.

Das *Hamilton*'sche Prinzip, welches der von *Lagrange* in seiner Mechanik benutzten Umformung des *d'Alembert*'schen Prinzips verwandt ist, unterscheidet sich von dem Aktionsprinzip dadurch, dass die Zeit unvariiert bleibt; als Beispiele für die Multiplikatorenmethode in Verbindung mit dem *Hamilton*'schen Prinzip seien *G. Kirchhoff*'s[192]) ursprüngliche Darstellungen der Theorie schwingender Platten und Stäbe, sowie der Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit hervorgehoben.

Ein dem *Hamilton*'schen formal ähnliches Prinzip, welches sich auf stationäre Bewegungszustände bezieht und die Form des Potentials als variierbar voraussetzt, hat *R. Clausius* aufgestellt und den Begriff der auszuführenden Variation erörtert[193]).

Die konjugierten Punkte bei dem *Jacobi*'schen Aktionsintegral haben *Thomson* und *Tait* (Fussn. 188) als kinetische Brennpunkte betrachtet und auf den Zusammenhang derselben mit der Frage der kinetischen Stabilität hingewiesen. *Darboux*[194]) hat für die Bewegung eines Punktes in der Ebene gezeigt, dass das *Hamilton*sche Integral, erstreckt über ein hinreichend kurzes Zeitintervall, ein Minimum ist. *D. Bobyleff*[195]) hat die zweite Variation des *Hamilton*schen wie des *Jacobi*'schen Aktionsintegrals allgemein auf eine zur Beurteilung des Zeichens geeignete Form gebracht und für hinreireichend kleine Integrationsgebiete als positiv nachgewiesen; er hat ferner die konjugierten Punkte der bezeichneten beiden Integrale betrachtet und als kinetische Brennpunkte der gleichzeitigen und der konservativen Wege unterschieden; letztere sind die Verallgemeinerung der *Thomson-Tait*'schen Brennpunkte, erstere sind Lagen des Massensystems, zwischen denen zwei unendlich wenig verschiedene Übergänge des Systems in derselben Zeit möglich sind. *Bobyleff* wendet seine Betrachtungen auf Beispiele an; unter diesen kommt auch ein solches vor, bei dem die lebendige Kraft in den Geschwindigkeiten lineare Glieder enthält. *B. Turksma*[196]) hat ebenfalls die konjugier-

---

191a) Gött. Nachr. 1896, Heft 2. Das. sowie bei *Mayer* weitere Litteratur.
192) Ges. Abh., p. 237, 285, 376.
193) Ann. Phys. Chem. 92, p. 433; J. de math. (2) 17, p. 193.
194) Théorie générale des surfaces 2, p. 451.
195) Berichte (Sapiski) der Akad. St. Petersburg 61 (1889), Beilage 5.
196) Diss. [Fussn. 118], p. 69.

ten Punkte des *Hamilton*'schen Integrals betrachtet und für den freien Fall und die Planetenbewegung bestimmt; er stellt sie als tautochrone Brennpunkte den konservativen d. h. auf das Aktionsintegral bezüglichen gegenüber.

Extreme von derselben Form wie beim Prinzip der kleinsten Aktion werden in der theoretischen Optik, ausgehend von der Emissionstheorie, auf Grund des Prinzips der kürzesten Zeitdauer der Lichtbewegung gefordert, wenn der Brechungsindex eine Funktion des Ortes ist. Ein Beispiel dieser optischen Interpretation einer Aufgabe der Variationsrechnung liefert schon *J. Bernoulli*'s Behandlung der Brachistochrone[197]); allgemein ist dieselbe von *W. R. Hamilton* gegeben, der sie zum Ausgangspunkt der allgemeinen dynamischen Untersuchung macht[198]); die kinetischen Brennpunkte erscheinen dabei als Verallgemeinerung der optischen.

197) *E. Mach*, Die Mechanik in ihrer Entwickelung, p. 400 (2. Aufl.).

198) *F. Klein*, Deutsche Math.-Ver. 1, (1891/92), p. 35. S. auch *P. Appell*, Traité de mécanique rationelle 1, p. 215.

(Abgeschlossen im September 1900.)

II A 8a. WEITERENTWICKELUNG DER VARIATIONSRECHNUNG IN DEN LETZTEN JAHREN

VON

E. ZERMELO UND **H. HAHN**

IN GÖTTINGEN.

Inhaltsübersicht.

1. Die Grundlagen der *Weierstrass*'schen Theorie.
2. Notwendige und hinreichende Bedingungen im einfachsten Falle.
3. Isoperimetrische Probleme.
4. Allgemeinere Probleme.
5. Beispiele und Anwendungen.
6. Existenzfragen.

1. Die Grundlagen der Weierstrass'schen Theorie (vgl. II A 8, Nr. **21**, *Kneser*). Die Weiterentwickelung der Variationsrechnung seit dem Jahre 1900 steht vorwiegend unter dem Einflusse der *Weierstrass*schen Theorie, die in *A. Kneser*'s Lehrbuche[1]) zuerst eine systematische Darstellung gefunden hat. Die formale Grundlage dieser Theorie, die Umformung der Integraldifferenz ΔJ vermittelst der E-Funktion, wird hier in ihrer geometrischen Bedeutung für sich untersucht und es wird ihr Zusammenhang mit der *Hamilton-Jacobi*'schen Theorie der Dynamik nachgewiesen. Ein „Feld" wird nach *Kneser*[2]) definiert durch eine einparametrige Schar $y = f(x, a)$ von Extremalen, d. h. von Lösungen der zu dem Integral:

$$J = \int f(x, y, y')\, dx$$

1) Lehrbuch der Variationsrechnung, Braunschweig 1900. (Im Folgenden stets als „Lehrbuch" zitiert.) Eine sehr übersichtliche und exakte Darstellung dieser Theorie giebt auch *W. F. Osgood*, Ann. of math. (2) 2 (1901), p. 105.

2) Lehrbuch § 14. Doch bedient sich *Kneser* hier immer der „homogenen" Parameterdarstellung der Kurven, von der wir hier absehen, um die Formeln zu vereinfachen und besseren Anschluss an die Arbeiten anderer Forscher zu gewinnen.

gehörenden *Lagrange*'schen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0,$$

soweit auf ihnen der Ausdruck $\frac{\partial y}{\partial a}$ nicht verschwindet, sodass sie einen Bereich der Ebene einfach überdecken. Vergleicht man innerhalb eines solchen Feldes die Integralwerte J auf benachbarten Extremalen, so reduziert sich die erste Variation δJ vermöge der Differentialgleichung auf die vom Integralzeichen freien „Grenzglieder", welche von der Verschiebung der Endpunkte herrühren. In jedem Punkte des Feldes giebt es aber eine Verschiebungsrichtung, für die auch die entsprechenden Grenzglieder verschwinden, und die Kurven, welche in jedem ihrer Punkte diese Richtung besitzen, bedecken wieder das ganze Feld und werden als die „Transversalen" des Feldes bezeichnet[3]). Dabei gilt der Satz, dass alle Extremalenbögen zwischen zwei Transversalen gleiche Integralwerte J ergeben[4]), eine Verallgemeinerung des *Gauss*'schen „Orthogonalitätssatzes" über geodätische Linien[5]). Extremalen und Transversalen bilden somit ein neues krummliniges Koordinatensystem innerhalb des Feldes, wobei der Parameter a der Extremalenschar und der Integralwert u längs einer Extremalen, gerechnet von einer festen Transversalen bis zu einem variabelen Endpunkte[6]), als Koordinaten erscheinen. Mit Hülfe dieser Transformation lässt sich nun die Differenz ΔJ der Integrale J längs einer Feldextremalen und einer beliebigen innerhalb des Feldes verlaufenden „Vergleichskurve" $\mathfrak{c}$ darstellen durch das Integral der *Weierstrass*'schen E-Funktion, genommen über die Vergleichskurve[7]).

3) *Kneser* braucht diesen Ausdruck nicht, sondern spricht von „Kurven, die von den Extremalen transversal geschnitten werden".

4) Lehrbuch § 15. Man vgl. auch *Darboux,* Théorie des surfaces 2, Nr. 521 ff. und Nr. 544 ff.

5) *Gauss,* Disq. c. superf. curv. 15—16.

6) Als Funktion von x und y betrachtet genügt u einer gewissen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, die eine Verallgemeinerung der *Jacobi-Hamilton*'schen Gleichung der Dynamik darstellt. Ist umgekehrt $u(x, y)$ eine beliebige Lösung dieser Differentialgleichung, so können die Kurven $u = \text{const.}$ als Transversalen einer Schar von Extremalen aufgefasst werden, die durch Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung gefunden wird. Kennt man eine Lösung $u(x, y, c)$ unsrer partiellen Differentialgleichung, die eine willkürliche Konstante c enthält, so liefert die Gleichung $\frac{\partial u}{\partial c} = \text{const.}$ die Gesamtheit der Extremalen. Lehrbuch § 19. Vgl. auch *Darboux,* Théorie des surfaces 2, Nr. 538f. und II A 8, Nr. **11** (*Kneser*).

7) Lehrbuch § 20. Als Vergleichskurven gelten dabei alle Kurven, deren

Dieselbe Umformung erreicht *D. Hilbert*[8]) auf folgendem Wege. An Stelle des gegebenen Integrales:

$$J = \int f(x, y, y')\, dx$$

betrachtet er das folgende:

$$J^* = \int \{f(x, y, p) + (y' - p) f_p(x, y, p)\}\, dx$$

und sucht p als Funktion von x und y so zu bestimmen, dass dieses Integral J^* vom Integrationswege unabhängig wird. So ergiebt sich für p die partielle Differentialgleichung:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} + p \frac{\partial p}{\partial y}\right) f_{pp} + p f_{py} + f_{px} - f_y = 0,$$

deren Charakteristiken die Extremalen des Problems, d. h. die Lösungen der entsprechenden *Lagrange*'schen Differentialgleichung sind, und man erhält eine Lösung p, indem man eine beliebige einparametrige Schar von Extremalen zu Grunde legt und in jedem Punkte x, y ihres Feldes die Ableitung $\frac{dy}{dx}$ längs der durch den Punkt gehenden Extremalen bildet. Für jede so bestimmte Funktion p wird also das Integral J^* vom Wege unabhängig; dieses Theorem bezeichnet *Hilbert* als den „Unabhängigkeitssatz". Das „Feldintegral" J^* verschwindet dann auf jeder Transversalen des Feldes; auf jeder Feldextremalen aber reduziert es sich auf das „Grundintegral" J[9]) und ist daher, als Funktion des oberen Endpunktes betrachtet, identisch mit der *Kneser*'schen Funktion u. Vermöge des Unabhängigkeitssatzes lässt sich nun das Grundintegral über einen Extremalenbogen ausdrücken als das Feldintegral J^* über eine Vergleichskurve $\mathfrak{c}$ (siehe Fussnote 7)), und die Subtraktion der beiden Integrale J und J^* über dieselbe Kurve $\mathfrak{c}$ liefert schliesslich die *Weierstrass*'sche Transformation der Integraldifferenz ΔJ.

2. Notwendige und hinreichende Bedingungen im einfachsten Falle. Aus der *Weierstrass*'schen Umformung der Integraldifferenz schliesst man, dass ein Extremalenstück einen grösseren oder kleineren

Anfangs- und Endpunkt auf denselben Transversalen des Feldes liegen, wie Anfangs- und Endpunkt des zu vergleichenden Extremalenbogens.

8) Mathematische Probleme, Vortrag gehalten auf dem internationalen Mathematikerkongress zu Paris 1900, Gött. Nachr. 1900, p. 291; Comptes rendus du deuxième congrès international des mathématiciens p. 106; Archiv Math. Phys. (3) 1 (1901), p. 231 (mit einigen Zusätzen).

9) Beide Bezeichnungen finden sich bei *Hilbert* nicht.

Integralwert ergiebt als jede Vergleichskurve c, längs deren die E-Funktion ein beständig positives oder negatives Vorzeichen besitzt.

Unterscheidet man nun mit *Kneser*[10]) ein „starkes“ und ein „schwaches“ Extremum, je nachdem nur die Punkte oder auch die Tangentenrichtungen der Vergleichskurven den entsprechenden der Extremalen benachbart sein müssen, so ergiebt sich innerhalb des Feldes für das *starke* Extremum das *Weierstrass*'sche Kriterium als notwendig und hinreichend, nach welchem das Vorzeichen der E-Funktion definit sein muss für eine willkürliche Richtung der Vergleichskurve[11]). Für das *schwache* Extremum dagegen braucht dieses Kriterium nur für hinreichend kleine Abweichungen der Tangentenrichtungen erfüllt zu sein, und ist dann äquivalent dem *Legendre*'schen Kriterium[11a]), das ein definites Vorzeichen der Funktion $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$ längs der Extremalen erfordert.

Das Problem reduziert sich hiernach, im Falle vorgeschriebener Endpunkte, auf die Frage, ob das betrachtete Extremalenstück mit einem Felde umgeben werden kann. Bei einem hinreichend kleinen Extremalenbogen ist dies immer der Fall; und die Grenzen, an denen diese Eigenschaft aufhört, bestimmen sich durch das *Jacobi*'sche Kriterium der „konjugierten Punkte“ (II A 8, Nr. **16** u. **17**, *Kneser*). Dass dieses Kriterium auch notwendig ist, beweist *Kneser*[12]) durch Betrach-

10) Lehrbuch § 16—17.

11) Doch vgl. hierzu ein Beispiel von *O. Bolza* (Bull. Am. math. soc. (2) 9 (1901), p. 1), sowie die sich darauf beziehenden Bemerkungen von *E. R. Hedrick* (Bull. Am. math. soc. (2) 9 (1901), p. 245). *W. F. Osgood* (Amer. Trans. 2 (1901), p. 273) beweist für den Fall des starken Extremums weiter: Bezeichnet $\overline{J}$ den von der Extremale gelieferten Integralwert und S ein gewisses die Extremale umgebendes Gebiet, so muss jede Schar ganz in S gelegener Kurven, die mit der Extremale Anfangs- und Endpunkt gemein haben, und deren Integralwerte gegen $\overline{J}$ konvergieren, die Extremale zur Grenzkurve haben. Auf Grund dieses Satzes erweitert *Osgood* die Klasse der zulässigen Vergleichskurven mit Hülfe einer geeigneten Verallgemeinerung des Begriffes des Kurvenintegrals. Vereinfachungen des *Osgood*'schen Beweises geben *O. Bolza* (Amer. Trans. 2 (1901), p. 422) und *E. Goursat* (Amer. Trans. 5 (1904), p. 110).

11a) Diese Bezeichnungsweise weicht von der in *Kneser*'s Lehrbuche ab, da dort auch von einem *Legendre*'schen Kriterium für das *starke* Extremum gesprochen wird.

12) Lehrbuch § 25; vgl. auch II A 8, Nr. **17**, *Kneser*, sowie *E. Zermelo*, Diss. Berl. 1894, p. 96. Über das Verhältnis dieser Methode zu den älteren, die zweite Variation benützenden vgl. Lehrbuch, p. 105. — Die Untersuchung eines von zwei konjugierten Punkten begrenzten Extremalenbogens durch Betrachtung der dritten und vierten Variation hat *A. Korn* (Münch. Ber. 1901, p. 76) kürzlich von Neuem aufgenommen, wobei er wieder zu den *Erdmann*'schen Kriterien (II A 8, Nr. **22**, *Kneser*) gelangte.

tung der Enveloppe, die zu den vom Anfangspunkte der Integration ausgehenden Extremalen gehört: er zeigt, dass es in jeder Nähe eines von zwei konjugierten Punkten begrenzten Extremalenbogens Kurven giebt, die dem Integrale denselben Wert erteilen, wie die Extremale. Dieser Beweis versagt, wenn die Enveloppe auf der betrachteten Extremalen einen Rückkehrpunkt besitzt, der seine Spitze dem Integrationsintervall zukehrt. *W. F. Osgood*[13]), der unabhängig von *Kneser* diesen Umstand bemerkte, zeigt, dass in diesem Ausnahmefalle der von zwei konjugierten Punkten begrenzte Extremalenbogen noch ein Extremum liefert.

Eine ganz analoge Schlussweise gilt, wenn der Anfangspunkt der Integration auf einer vorgeschriebenen „Grenzkurve" $\mathfrak{K}$ variieren kann; man hat dann ein Feld von Extremalen zu verwenden, welche die Kurve $\mathfrak{K}$ transversal schneiden[14]). Der erste Punkt, in dem die betrachtete Extremale die Enveloppe dieses Feldes berührt, heisst der zur Kurve $\mathfrak{K}$ gehörige „kritische Punkt"[15]); in ihm hört die Extremale auf, ein Extremum zu liefern[16]). Er liegt immer diesseits des zu dem Schnittpunkte unsrer Extremale mit der Kurve $\mathfrak{K}$ gehörigen konjugierten Punktes; seine Lage hängt nur ab von der Krümmung der Kurve $\mathfrak{K}$ in diesem Schnittpunkte[17]).

Sind beide Endpunkte 1, 2 auf zwei Kurven $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ variabel, so müssen beide Grenzkurven die Extremale transversal schneiden, und

---

13) Amer. Trans. 2 (1901), p. 166. Es wird dort auch gezeigt, dass beim Probleme der kürzesten Linien auf dem Rotationsellipsoide dieser Ausnahmefall thatsächlich eintritt. Übrigens findet sich ein Hinweis auf die Möglichkeit eines solchen Rückkehrpunktes schon bei *H. Poincaré*, „Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste" 3 (1899), Nr. 371, anlässlich einer Diskussion des Prinzips der kleinsten Wirkung. Ein regulärer Punkt der Enveloppe aller durch einen Punkt gehenden Extremalen (trajectoires) wird dort als „foyer ordinaire" bezeichnet; ein Rückkehrpunkt, der seine Spitze dem Integrationsintervalle zukehrt, als „foyer en pointe", ein nach der entgegengesetzten Richtung liegender Rückkehrpunkt als „foyer en talon".

14) Dass sich ein die Kurve $\mathfrak{K}$ transversal schneidender Extremalenbogen in der Umgebung dieser Kurve stets mit einem solchen Felde umgeben lässt, beweist *A. Kneser*, Lehrbuch § 30. Die transversale Lage der Kurve $\mathfrak{K}$ und der Extremale ergiebt sich bekanntlich als notwendig durch Betrachtung der ersten Variation (vgl. II A 8, Nr. 6, *Kneser* und Lehrbuch § 12).

15) *Kneser* bezeichnet diesen Punkt als „konjugierten Brennpunkt"; die Terminologie des Textes rührt von *G. A. Bliss* her.

16) Lehrbuch § 25. Der daselbst mitgeteilte Beweis unterliegt derselben Ausnahme, wie im Falle fester Endpunkte. Ein von *G. A. Bliss*, Amer. Trans. 3 (1902), p. 132 durch Betrachtung der zweiten Variation geführter Beweis gilt allgemein, sofern der Extremalenbogen über den kritischen Punkt hinausgeht.

17) Lehrbuch § 30; *G. A. Bliss*, l. c. p. 139.

der kritische Punkt d_1, der zur Kurve $\mathfrak{K}_1$ gehört, darf, wenn ein Extremum stattfinden soll, weder in das Integrationsintervall 12 noch zwischen 2 und den zu $\mathfrak{K}_2$ gehörenden kritischen Punkt d_2 fallen. Die Notwendigkeit dieser letzten neu hinzukommenden Bedingung beweist *G. A. Bliss*[18]), indem er einen Punkt 3 zwischen d_1 und d_2 auf der Extremalen annimmt, sodass diese bei der Anordnung $12d_1 3d_2$ zwar zwischen $\mathfrak{K}_2$ und 3, aber nicht mehr zwischen $\mathfrak{K}_1$ und 3 ein Minimum des Integrales liefert. Dann giebt es also eine benachbarte Kurve $1'2'3$, welche $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ in $1'$ und $2'$ schneidet und für welche $J_{1'2'3'} < J_{123}$, zugleich aber $J_{2'3} > J_{23}$, sodass sich in der That:

$$J_{1'2'} = J_{1'2'3} - J_{2'3} < J_{123} - J_{23} = J_{12}$$

ergiebt. Liegt dagegen d_2 zwischen 2 und d_1, während im ganzen betrachteten Intervalle das *Legendre*'sche, bezw. das *Weierstrass*'sche Kriterium erfüllt ist, und ist $1'2'$ eine willkürliche benachbarte Vergleichskurve zwischen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, so kann man ihren Endpunkt $2'$ so mit dem zwischen d_1 und d_2 liegenden Punkte 3 verbinden, dass umgekehrt $J_{2'3} < J_{23}$, aber $J_{1'2'3} > J_{123}$ und somit $J_{1'2'} > J_{12}$ wird, d. h. die Extremale 12 liefert hier wirklich ein Minimum[18a]). Ein zugleich notwendiges und hinreichendes Kriterium, das auch für den Fall gilt, wo d_1 und d_2 zusammenfallen, erhält *Bliss* endlich durch Betrachtung der Kurve T, welche durch 2 geht und von allen Extremalen transversal geschnitten wird, die auf $\mathfrak{K}_1$ transversal stehen. Es wird nämlich ein Minimum dann und nur dann stattfinden, wenn diese Transversale T, welche $\mathfrak{K}_2$ in 2 berührt, in der Umgebung von 2 ganz auf der einen, $\mathfrak{K}_1$ zugekehrten Seite von $\mathfrak{K}_2$ liegt, vorausgesetzt, dass auf 12 überall das *Legendre*'sche bezw. das *Weierstrass*'sche Kriterium erfüllt ist und im Punkte 2 ausserdem $f > 0$ ist.

3. Isoperimetrische Probleme[19]) (II A 8, Nr. 9, *Kneser*). Die Anwendung der *Weierstrass*'schen Ideen auf isoperimetrische Probleme findet sich in vollständiger Durchführung zuerst bei *Kneser*[20]). Das

18) Math. Ann. 58 (1904), p. 70.

18a) *G. A. Bliss* selbst (l. c.) beweist sein *hinreichendes* Kriterium nicht wie angegeben, sondern durch Benutzung der auf $\mathfrak{K}_1$ transversal stehenden Feldextremalen $1'2'$ und durch zweimalige Differentiation des entsprechenden Integrales $J_{1'2'} = J(\gamma)$ nach dem Parameter γ des Feldes. Bezüglich analoger Untersuchungen von *G. Erdmann* und *A. Mayer* vgl. II A 8, Nr. 22 (*Kneser*).

19) Die isoperimetrischen Probleme sind als Spezialfall in dem im nächsten Abschnitte behandelten allgemeinen Probleme enthalten, so dass alle dort angegebenen Sätze auch im Falle des isoperimetrischen Problemes ihre Anwendung finden. An dieser Stelle werden nur diejenigen Untersuchungen erwähnt, die sich speziell mit dem einfachsten isoperimetrischen Probleme befassen.

20) Lehrbuch § 32—42.

einfachste Problem dieser Art verlangt, unter allen, zwei gegebene Punkte verbindenden Kurven, welche dem „isoperimetrischen Integrale“:

$$K = \int g(x, y, y')\, dx$$

einen vorgeschriebenen Wert erteilen, diejenige zu finden, für welche das Integral:

$$J = \int f(x, y, y')\, dx$$

ein Extremum wird. Da hier die zugehörige *Lagrange*'sche Differentialgleichung:

$$\frac{\partial (f + \lambda g)}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial (f + \lambda g)}{\partial y'} = 0$$

den Multiplikator λ (die „isoperimetrische Konstante“) als Parameter enthält, so bilden die von einem festen Punkte ausgehenden Extremalen eine zweiparametrige Schar und in der Umgebung des Ausgangspunktes ein räumliches Feld[21]), wenn man den Wert des isoperimetrischen Integrales als dritte Raumkoordinate einführt. In diesem Felde gelten die analogen Transformationen wie im einfachsten Falle. Doch ist diese „*Weierstrass*'sche Konstruktion“ nur möglich, wenn die Vergleichskurve, als Raumkurve betrachtet, ganz innerhalb des räumlichen Feldes verläuft[22]). Wenn daher auch das *Weierstrass*'sche und das *Legendre*'sche Kriterium für das starke und das schwache Extremum auf den isoperimetrischen Fall übertragen werden können[23]), so ist dabei das „starke“ Extremum nur in dem modifizierten Sinne aufzufassen, der eine *räumliche* Nachbarschaft der verglichenen Kurven, also auch hinreichend kleine Abweichungen des isoperimetrischen Integrales in entsprechenden Punkten erfordert.

Auch das *Jacobi*'sche Kriterium lässt sich in entsprechender Form auf isoperimetrische Probleme übertragen. Dass die so erhaltene Bedingung notwendig ist, beweist *Kneser*, indem er aus der zweiparametrigen Extremalenschar, die das Feld bildet, eine einparametrige Schar so auswählt, dass sie eine Enveloppe besitzt, wodurch dann dieselben Schlüsse ermöglicht werden wie im einfachsten Falle[24]). In einer späteren Abhandlung[24a]) giebt *Kneser* einen anderen Beweis durch Betrachtung der zweiten Variation.

---

21) Lehrbuch § 41. 22) Vgl. Lehrbuch § 38.

23) Lehrbuch § 36. Das *Legendre*'sche Kriterium kann auch durch Betrachtung der zweiten Variation erhalten werden. Vgl. *O. Bolza,* Amer. Trans. 3 (1902), p. 305 = Decennial publications of the university of Chicago 9 (1902).

24) Lehrbuch § 40. In gewissen Ausnahmefällen versagt dieser Beweis.

24a) Math. Ann. 55 (1902), p. 86. Der Grundgedanke stammt aus Vorlesungen von *Weierstrass*. Auch dieser Beweis umfasst einen gewissen Ausnahmefall nicht,

Es sei noch bemerkt, dass bei allen diesen Entwickelungen vorausgesetzt ist, dass die untersuchte Extremale nicht gleichzeitig Extremale des isoperimetrischen Integrales im Sinne des absoluten Extremums sei; eine Behandlung dieses Ausnahmefalles liegt bisher nicht vor[25]).

4. Allgemeinere Probleme. Eine vollständig durchgeführte Übertragung der *Weierstrass*'schen Methoden auf einfache Integrale mit beliebig vielen unbekannten Funktionen, zwischen denen Bedingungsdifferentialgleichungen bestehen, liegt bisher nicht vor. Doch liesse sich unter Verwendung aller von den verschiedenen Autoren bisher erhaltenen Resultate, auf deren Wiedergabe wir uns hier beschränken, eine solche Theorie wohl herstellen. Einen Ansatz nach dieser Richtung geben die Untersuchungen von *A. Kneser*[26]). Er beweist, dass innerhalb eines Feldes von Extremalen, dessen Existenz vorausgesetzt wird, die dem *Weierstrass*'schen und *Legendre*'schen Kriterium analogen Bedingungen für ein starkes, bezw. schwaches Extremum hinreichen. Unter derselben Voraussetzung beweist *A. Mayer* für dieses „allgemeine" Problem den *Hilbert*'schen Unabhängigkeitssatz[27]) sowie seinen Zusammenhang mit der Integration der *Jacobi-Hamilton*'schen partiellen Differentialgleichung, die zu dem Variationsprobleme oder dem entsprechenden *Lagrange*'schen Differentialgleichungssysteme gehört.

Mit demselben allgemeinen Probleme beschäftigt sich *G. v. Escherich* in einer Reihe von Abhandlungen[28]). Er geht aus von der Betrachtung des durch Variation der *Lagrange*'schen Gleichungen entstehenden linearen Differentialgleichungssystemes, das er als „accessorisches System" bezeichnet[29]). Aus einer zwischen gewissen Lösungen desselben bestehenden Identität ergiebt sich unmittelbar die Über-

---

den aber *O. Bolza* mit Hülfe einer von *H. A. Schwarz* in seinen Vorlesungen vorgetragenen Methode erledigt (Math. Ann. 57 (1903), p. 44). Ein ganz allgemeiner Beweis für das *Jacobi*'sche Kriterium ergiebt sich aus den unten besprochenen Arbeiten von *G. v. Escherich*. Vgl. *H. Hahn*, Math. Ann. 58 (1904), p. 166.

25) Nach mündlichen Mitteilungen von *C. Carathéodory* können in solchen Ausnahmefällen diskontinuierliche Lösungen des Variationsproblems auftreten, die den entsprechend modifizierten *Weierstrass*'schen Methoden noch zugänglich sind.

26) Lehrbuch §§ 56—61. Das dort behandelte Problem ist etwas allgemeiner als das im Text angegebene.

27) Leipz. Ber. 1903, p. 131 = Math. Ann. 58 (1904), p. 235. Der Fall zweier unbekannter Funktionen auch bei *N. Gernet*, Diss. Gött. 1902.

28) Zusammengefasst in Wien. Ber. 110 (1901), p. 1355, wo sich *v. Escherich* der homogenen Darstellung durch einen Parameter bedient. Vgl. Fussn. 2).

29) Über seine Lösungen wird eine grosse Anzahl von Sätzen bewiesen: Wien. Ber. 107 (1898), p. 1234 ff., 1294 ff.; ibid. 110 (1901), p. 1367 ff. Als besonders wichtig erweist sich dabei der für dieses System geltende *Green*'sche

führung der zweiten Variation in die von *Clebsch* angegebene „reduzierte“ Form[30]) (II A 8, Nr. **15**, *Kneser*), aus der nun weiter das *Legendre*'sche Kriterium als notwendige Bedingung folgt[31]). Für das Folgende wird nun diese Bedingung als erfüllt vorausgesetzt, und es wird ein „Hauptfall“ und ein „Ausnahmefall“ unterschieden[32]). Im Hauptfalle hat, wie gezeigt wird, die *Mayer*'sche Determinante $\Delta(x, x_0)$ (II A 8, Nr. **16**, p. 596, *Kneser*) (die „Determinante des dem Punkte x_0 konjugierten Systemes“) im Punkte x_0 eine isolierte Nullstelle, d. h. ein genügend kleiner von x_0 ausgehender Extremalenbogen lässt sich mit einem Felde im *Weierstrass*'schen Sinne umgeben, während im Ausnahmefalle $\Delta(x, x_0)$ identisch verschwindet[33]). Im Hauptfalle lässt sich also (durch die Nullstellen von $\Delta(x, x_0)$) zu jedem Punkte x_0 ein konjugierter Punkt definieren, und die Notwendigkeit des *Jacobi*'schen Kriteriums wird nun auf zwei verschiedenen Wegen bewiesen[34]). Ferner giebt *v. Escherich* durch Betrachtung der zweiten Variation einen Beweis, dass auf einem keine zwei konjugierten Punkte enthaltenden Extremalenbogen ein definites Zeichen der quadratischen Form, in welche die zweite Variation transformiert wird, ein schwaches Extremum zur Folge hat, m. a. W., dass innerhalb des Feldes das *Legendre*'sche Kriterium für ein schwaches Extremum hinreicht[35]).

Mit analogen Methoden behandelt *H. Hahn* den Fall, dass unter den Bedingungsgleichungen des Problems auch endliche Gleichungen vorkommen[36]).

Satz (l. c. 107, p. 1244), insbesondere die in demselben auftretende bilineare Differentialform $\psi(z, r; u, \varrho)$.

30) l. c. 110, p. 1390 ff. Vgl. auch l. c. 107, p. 1242 ff. und 108, p. 1278 ff.

31) l. c. 107, p. 1383 ff.; 110, p. 1396 ff.

32) Der Ausnahmefall tritt dann und nur dann ein, wenn die betrachtete Extremale zugleich Extremale für ein einfacheres Variationsproblem ist (*H. Hahn,* Math. Ann. 58 (1904), p. 148), oder anders gesprochen, wenn ein gewisses überbestimmtes System linearer Differentialgleichungen eine von Null verschiedene Lösung besitzt (*G. v. Escherich,* Wien. Ber. 108 (1899), p. 1287 ff.).

33) Wien. Ber. 108 (1899), p. 1299; 110 (1901), p. 1405.

34) Wien. Ber. 110 (1901), p. 1409 ff. Der eine dieser Beweise ist eine Übertragung des *Erdmann-Weierstrass*'schen Beweises (Lehrbuch § 28) auf unser allgemeines Problem; der zweite giebt eine exakte Durchführung der von *L. Scheeffer* (Math. Ann. 25 (1885), p. 522) verwendeten Methode. Die dabei festgehaltene Voraussetzung, dass die Bedingungsgleichungen, denen die Variationen unterliegen, durch die linearen Glieder ihrer *Taylor*'schen Entwickelungen ersetzt werden können, ist im „Hauptfalle“ immer zulässig (*H. Hahn,* Math. Ann. 58 (1904), p. 158).

35) Math. Ann. 55 (1902), p. 108.

36) Monatsh. Math. Phys. 14 (1903), p. 3.

Einen auf wesentlich anderen Grundlagen beruhenden, allerdings nicht ganz allgemeinen Beweis des *Jacobi*'schen Kriteriums liefert *A. Kneser*[37]) durch eine Verallgemeinerung der von ihm im einfachsten Falle benutzten Schlussweise, welche auf der Existenz gewisser Enveloppen beruht.

Es sei endlich noch eine von *H. Hahn*[38]) gegebene Methode zur Aufstellung des *Lagrange*'schen Differentialgleichungssystemes erwähnt, welche nicht von vornherein voraussetzt, dass die gesuchte Kurve zweimal differentiierbar sei, sondern aus der Existenz stetiger erster Ableitungen auch die der zweiten Derivierten folgert[39]).

Aus allen diesen Untersuchungen geht hervor, dass, solange es sich um einfache Integrale handelt, das Auftreten mehrerer unbekannter Funktionen unter dem Integralzeichen zwar eine grössere Komplikation der Rechnungen und Beweise zur Folge hat, dass aber die Resultate den für den Fall einer unbekannten Funktion erhaltenen durchaus analog bleiben. *J. Hadamard*[40]) macht nun darauf aufmerksam, dass dies bei mehrfachen Integralen nicht mehr durchaus der Fall ist. So ist es bei mehrfachen Integralen mit mehreren unbekannten Funktionen für das Eintreten eines Extremums nicht notwendig, dass die „reduzierte" quadratische Form, in welche nach *Clebsch*[40a]) die zweite Variation transformiert werden kann, definit sei[41]).

5. Beispiele und Anwendungen. Die Fruchtbarkeit der von *Weierstrass* eingeführten neuen Methoden zeigt sich besonders darin, dass sie die vollständige Erledigung klassischer Variationsprobleme gestatten, die vorher nur unvollkommen behandelt werden konnten, und umgekehrt geben diese speziellen Aufgaben wieder sehr häufig

37) Charkow Math. Mitt. (2) 7 (1902).

38) Monatsh. Math. Phys. 14 (1903), p. 325.

39) Diese Problemstellung geht zurück auf *P. du Bois-Reymond*, der den Fall eines Integrales mit n Ableitungen ohne Nebenbedingung untersucht (Math. Ann. 15 (1879), p. 564). Eine dieselbe Frage behandelnde Abhandlung von *E. Zermelo* wird demnächst in den Math. Ann. erscheinen. Für den einfachsten Fall der Variationsrechnung gab *D. Hilbert* eine sehr anschauliche Methode an, die wiedergegeben ist bei *J. R. Whittemore*, Ann. of math. (2) 2 (1901), p. 130 und *N. Gernet*, Diss. Gött. 1902, p. 15.

40) Bull. soc. math. 30 (1903), p. 253.

40a) J. f. Math. 56 (1859), p. 122 (vgl. II A 8, Nr. **25**, *Kneser*).

41) Mit Doppelintegralen beschäftigen sich ferner ausser dem einschlägigen Abschnitte in *Kneser*'s Lehrbuche (§§ 62—69): *D. Hilbert* (Mathem. Probleme (siehe Fussn. 8)) und *W. F. Osgood* (Ann. of math. (2) 2 (1901), p. 125), die auf dieselben den Unabhängigkeitssatz übertragen, und *A. Sommerfeld* (Deutsche Math.-Ver. 8 (1900), p. 188) der das Analogon des *Jacobi*'schen Kriteriums beweist.

Anlass zu neuen Fragestellungen und neuen Gesichtspunkten und damit auch zur Weiterentwickelung der allgemeinen Theorie.

So behandelt *A. Kneser*[42]) das *Newton*'sche Problem von der Rotationsfläche kleinsten Widerstandes und zeigt, dass ein schwaches Extremum vorhanden ist, wenn der Rotationskörper an der Spitze unter dem Randwinkel 45^0 durch eine kreisförmige Scheibe abgestumpft wird[43]). Derselbe Autor erledigt[44]) das „Problem der Dido", zwei nicht vorgeschriebene Punkte einer gegebenen Kurve durch eine zweite Kurve von gegebener Länge so zu verbinden, dass der von beiden eingeschlossene Flächeninhalt ein Maximum wird. Das sogenannte „isoperimetrische Problem auf einer Fläche" oder das „Problem der Kurven kürzesten Umrings" wird behandelt von *J. R. Whittemore*[45]) und *O. Bolza*[45a]): es soll auf einer gegebenen Fläche die kürzeste Linie gefunden werden, die zwei vorgeschriebene Punkte einer gegebenen Kurve verbindet und mit dieser einen gegebenen Flächeninhalt einschliesst; als Lösung ergeben sich bekanntlich die Kurven konstanter geodätischer Krümmung. Eine ausführliche Theorie der geodätischen Linien auf einer Ringfläche giebt *G. A. Bliss*[46]).

Ferner beweist *A. Kneser*[47]) die Stabilität des Gleichgewichtes schwerer hängender Fäden. Wird nämlich um die Kettenlinie, welche die potentielle Energie des Fadens zu einem Minimum macht, ein Gebiet S abgegrenzt, und wird der Faden so gebogen, dass er nicht mehr ganz in S liegt, so besitzt die Zunahme seiner potentiellen Energie eine von Null verschiedene untere Grenze[48]). Mit Hilfe dieses Satzes führt die von Systemen mit einer endlichen Anzahl von Freiheitsgraden her bekannte *Dirichlet*'sche Schlussweise (IV 1, Nr. 45, Fussn. 275, *Voss*) auch hier zum Ziele.

Als eine wichtige Ergänzung des *Jacobi*'schen Kriteriums beweist

---

42) Arch. Math. Phys. (3) 2 (1902), p. 267.

43) Dass im Falle eines Extremums der Winkel zwischen „Stirnfläche" und „Mantelfläche" notwendig 45^0 beträgt, wurde von *E. Armanini* bewiesen (Ann. di mat. (3) 4 (1900), p. 131). Dort findet sich auch die Litteratur über den Gegenstand zusammengestellt (l. c. p. 149).

44) Math. Ann. 56 (1903), p. 169.

45) Ann. of math. (2) 2 (1901), p. 176.

45a) Decennial publications of the university of Chicago 9 (1902) und Math. Ann. 57 (1903), p. 48. Vgl. auch *Darboux*, Théorie des surfaces 3, Nr. 651 ff. und *Kneser*, Lehrbuch § 34.

46) Ann. of math. (2) 4 (1902), p. 1.

47) J. f. Math. 125 (1903), p. 189.

48) Dieser Satz ist vollständig analog dem in Fussn. 11) angegebenen Satze von *Osgood*.

G. Darboux[49]) und später *E. Zermelo*[50]) einen Satz, nach welchem der Bogen einer geodätischen Linie im allgemeinen schon vor dem nächsten konjugierten Punkte aufhören muss, die „allerkürzeste" Verbindungslinie seiner Endpunkte zu sein, sondern zuletzt nur die kürzeste unter den benachbarten darstellt. *Zermelo* zeigt ferner, dass innerhalb eines begrenzten einfach zusammenhängenden ebenen Bereiches die kürzesten Verbindungslinien zweier Punkte (II A 8, Nr. **23**, *Kneser*)[50a]) immer eindeutig bestimmt sind, und er betrachtet schliesslich auf einer vorgelegten Fläche $z = \varphi(x, y)$ die „kürzesten Linien von begrenzter Steilheit" $\left(\frac{dz}{ds} \leqq k\right)$ als Beispiel eines Problems mit Differentialungleichungen. Es treten hier diskontinuierliche Lösungen auf, wie dies bei Ungleichungen in der Regel der Fall zu sein scheint.

Um auch die isoperimetrischen Probleme mit Doppelintegralen der allgemeinen Methode zugänglich zu machen, behandelt *J. O. Müller*[51]) als wichtigstes Beispiel die schon von *H. A. Schwarz*[52]) bewiesene Eigenschaft der Kugel, eine kleinere Oberfläche zu besitzen als alle geschlossenen Flächen vom gleichen Volumen, indem er, entsprechend dem *Weierstrass*'schen Ideengange, ein Feld von Kugeln konstruiert und mittelst desselben den Wert der Kugeloberfläche darstellt durch ein Flächenintegral über eine beliebige geschlossene Vergleichsfläche gleichen Volumens, wobei der Integrand beständig < 1 ist. Dasselbe Theorem ergiebt sich übrigens bei *H. Minkowski*[53]) als Spezialfall eines viel allgemeineren Satzes über Volumina und Oberflächen konvexer Körper.

Eine Aufgabe die als Umkehrung eines Problemes der Variationsrechnung bezeichnet werden kann, löst *G. Hamel*[54]), indem er alle Geometrien, d. h. alle Massbestimmungen in der Ebene aufstellt, für welche die geraden Linien die kürzesten sind. Es kommt dies darauf hinaus, das allgemeinste Integral $\int f(x, y, y')\,dx$ aufzufinden, welches durch die Geraden der Ebene zu einem Minimum gemacht wird. Hierdurch ist der Anschluss an diejenigen Untersuchungen gewonnen, die zu einer vorgelegten Differentialgleichung die zugehörigen Variationsprobleme suchen[55]). *Hamel* geht insofern über diese hinaus, als er

49) Théorie des surfaces 3, Nr. 623.

50) Deutsche Math.-Ver. 11 (1902), p. 184.

50a) Vgl. *Darboux* l. c. Nr. 632 und *Kneser,* Lehrbuch § 44.

51) Gött. Nachr. 1902, p. 176; Diss. Gött. 1903.

52) Gött. Nachr. 1884, p. 1 = Ges. Abh. 2, p. 327.

53) Deutsche Math.-Ver. 9 (1901), p. 115; Math. Ann. 57 (1903), p. 474. Dabei sind als Vergleichskörper nur konvexe Körper zugelassen.

54) Diss. Gött. 1901; Math. Ann. 57 (1903), p. 231.

55) Für den Fall einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung

verlangt, dass auch die hinreichenden Bedingungen der Variationsrechnung erfüllt seien.

Eine Anwendung der Variationsrechnung auf die Theorie der partiellen Differentialgleichungen geben *Yoshiye*[56]) und *E. R. Hedrick*[57]), indem sie, einen von *D. Hilbert* in seinen Vorlesungen gegebenen Gedanken ausführend, nachweisen, dass die Gleichungen der charakteristischen Streifen einer partiellen Differentialgleichung erster oder zweiter Ordnung immer übereinstimmen mit den *Lagrange*'schen Gleichungen eines gewissen Variationsproblemes.

6. Existenzfragen. Während die klassische Methode der Variationsrechnung von einer gegebenen Lösung der *Lagrange*'schen Differentialgleichung ausgeht, das Randwertproblem also als gelöst betrachtet und nun untersucht, ob diese Lösung wirklich ein Extremum liefert, stellt sich *D. Hilbert*[58]) die Aufgabe, in gewissen Fällen von vornherein die Existenz einer Kurve oder Fläche von grösstem oder kleinstem Integralwerte zu beweisen, welche dann auf Grund dieser Eigenschaft die Differentialgleichung unter den gegebenen Randbedingungen erfüllen muss und damit einen Schluss auf die Lösbarkeit des Randwertproblemes gestattet.

---

ist diese Theorie durchgeführt bei *Darboux,* Théorie des surfaces 3, Nr. 604—606, wo u. a. der Satz bewiesen wird, dass zu jeder Gleichung $y'' = \varphi(x, y, y')$ sich unendlich viele Integrale $\int f(x, y, y')\,dx$ finden lassen, deren Extremalen die Lösungen der Gleichung sind (vgl. hierüber auch *J. Kürschák,* Math. Ann. 56 (1903), p. 163). — *A. Hirsch* (Math. Ann. 49 (1897), p. 49) beweist weiter: Wenn der aus der Gleichung $F(x, y, y', \ldots, y^{(2n)}) = 0$ abgeleitete lineare Differentialausdruck $\sum_{k=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} u^{(k)}$ „sich selbst adjungiert" ist (II A 4 b, Nr. **26**, *Vessiot*), lässt sich durch Quadraturen ein Integral $\int f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\,dx$ finden, dessen Extremalen durch die Gleichung $F = 0$ gegeben sind. Es wird ferner die Gültigkeit eines analogen Satzes für partielle Differentialausdrücke der zweiten Ordnung mit zwei oder drei unabhängigen Veränderlichen bewiesen; die Vermutung, es gelte dies für eine beliebige Anzahl unabhängiger Veränderlicher, wurde von *W. Hertz* (Diss. Kiel 1903) für $n = 4, 5$ bestätigt. Weitere Litteratur dieses Gegenstandes giebt *Hamel.* — Hierher gehört auch das von *A. Guldberg* (Christiania Skrift. 1902, Nr. 7) behandelte Problem, das allgemeinste Integral $\int f(x, y, y')\,dx$ aufzufinden, das invariant bleibt bei einer kontinuierlichen Gruppe von Transformationen. Es zeigt sich, dass für solche Integrale die *Lagrange*'sche Gleichung sich auf Quadraturen oder auf eine Gleichung erster Ordnung zurückführen lässt.

56) Math. Ann. 57 (1903), p. 185.

57) Ann. of math. (2) 4 (1903), p. 141, 157.

58) Deutsche Math.-Ver. 8 (1900), p. 184.

Seinen Gedankengang entwickelt *Hilbert* zunächst an dem Beispiel der kürzesten Linien auf Flächen. Da die Bogenlängen aller zwei gegebene Punkte der Fläche verbindenden Kurven eine untere Grenze l besitzen, so existiert eine unendliche Folge von Kurven, deren Bogenlängen diesen Wert l zur Grenze haben. Diese Kurven konvergieren aber gegen eine Grenzkurve, von der sich beweisen lässt[59]), dass sie differentiierbar ist und die minimale Bogenlänge l besitzt. Dieselbe Schlussweise überträgt *Ch. A. Noble*[60]) unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen auf einfache Integrale, die eine oder zwei unbekannte Funktionen und deren erste Ableitungen enthalten.

Hilbert[61]) selbst verwendet seine Methode zu einer strengen Begründung der als „*Dirichlet*'sches Prinzip" bekannten Beweismethode (II A 7 b, Nr. **24** u. **25**, *Burkhardt* u. *Meyer*), auf Grund deren *Riemann* die Existenz der überall endlichen Integrale auf einer vorgelegten *Riemann*'schen Fläche erschloss (II B 2, Nr. **12**, *Wirtinger*). Es handelt sich hier darum, die Existenz einer auf der ganzen *Riemann*'schen Fläche regulären Potentialfunktion $u(x, y)$ nachzuweisen, welche entlang einer geschlossenen, die Fläche nicht zerstückelnden Kurve C, die man immer aus geraden, den Koordinatenaxen parallelen Stücken bestehend annehmen kann, den Sprung 1 erleidet. Bildet man für alle beliebigen dieser Randbedingung genügenden Funktionen das über die ganze Fläche erstreckte „*Dirichlet*'sche Integral":

$$\int\int \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy,$$

so haben die Integralwerte eine untere Grenze d. Es sei nun U_1, U_2, U_3, ... eine Folge von Funktionen, deren *Dirichlet*'sche Integrale die Grenze d ergeben, und die etwa so gewählt seien, dass die über ein gewisses Stück der x-Axe erstreckten Integrale $\int U_n dx$ sämtlich den

59) Eine Ausführung des Beweises giebt *Ch. A. Noble* (Diss. Gött. 1901, p. 10) auf Grund der Thatsache, dass zwei genügend nahe Punkte der Fläche sich immer durch eine geodätische Linie verbinden lassen, die auch die kürzeste ist. Ein hiervon unabhängiger Beweis liesse sich mit den von *Hilbert* zum Beweise des *Dirichlet*'schen Prinzips verwendeten Methoden führen. — Aus der Differentiierbarkeit der gefundenen Kurve folgt unmittelbar, dass sie eine geodätische Linie sein muss, und somit auf einer analytischen Fläche selbst analytisch ist.

60) Diss. Gött. 1901.

61) Über das *Dirichlet*'sche Prinzip, Gött. Festschrift, Berlin 1901. Bezüglich der Anwendung auf die gewöhnliche Randwertaufgabe der Potentialtheorie vgl. *D. Hilbert*, Deutsche Math.-Ver. 8 (1900), p. 186. Doch ist die dort skizzierte Methode etwas verschieden von der im Texte angegebenen. Eine etwas weitere Ausführung dieser älteren *Hilbert*'schen Methode bei *E. R. Hedrick*, Diss. Gött. 1901, p. 69 ff.

Wert Null haben. Dann lässt sich aus ihnen eine andere Folge u_1, u_2, u_3, ... so auswählen, dass für beliebige (a, b) der Grenzwert:

$$v(x, y) = \lim_{n=\infty} \int_a^x \int_b^y u_n \, dx \, dy$$

existiert und eine stetige Funktion von x und y darstellt, solange das Integrationsgebiet keinen Verzweigungspunkt enthält und von der Kurve C nicht geschnitten wird. Der von (a, b) unabhängige Ausdruck:

$$u(x, y) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \lim_{\varepsilon=0,\, \eta=0} \lim_{n=\infty} \frac{1}{\varepsilon \eta} \int_x^{x+\varepsilon} \int_y^{y+\eta} u_n \, dx \, dy$$

ist dann die gesuchte Potentialfunktion, wie folgendermassen bewiesen wird. Für eine willkürliche Funktion ζ und ein beliebiges Rechteck R muss die Gleichung bestehen:

$$\lim_{n=\infty} \iint_{(R)} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial u_n}{\partial y} \right) dx \, dy = 0,$$

welche hier dieselbe Rolle spielt, wie das Verschwinden der ersten Variation in der klassischen Variationsrechnung. Durch partielle Integrationen und Ausführung des Grenzüberganges unter den Integralzeichen erhält man den Satz, dass eine Funktion w, für welche $\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = v(x, y)$ ist, für willkürliche ζ der Gleichung genügen muss:

$$\iint_{(R)} \frac{\partial^6 \zeta}{\partial x^3 \partial y^3} \Delta w \, dx \, dy = 0,$$

und hieraus folgt[62]), dass Δw die Form haben muss:

$$\Delta w = Xy^2 + X'y + X'' + Yx^2 + Y'x + Y'',$$

wo X, X', X'' nur von x abhängen, Y, Y', Y'' nur von y. Durch Hinzufügung leicht zu bildender Integrale kann man daher aus w eine Funktion z ableiten, die der Gleichung $\Delta z = 0$ genügt und mit u und v durch die Beziehung verbunden ist:

$$\frac{\partial^6 z}{\partial x^3 \partial y^3} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = u(x, y),$$

wodurch die Potentialeigenschaft von u erwiesen ist.

Nach *Hilbert*'schen Prinzipien behandelt *E. R. Hedrick*[63]) die

62) l. c. § 4. Dieses Beweisverfahren zeigt eine grosse Analogie mit dem von *P. du Bois-Reymond* für einfache Integrale angewandten (siehe Fussn. 39), geht aber wesentlich weiter, da es auch die Existenz erster Derivierter der Minimalfunktion zu erschliessen gestattet.

63) Diss. Gött. 1901, p. 64 ff.

Randwertaufgabe für die *Liouville*'sche Gleichung $\Delta u = e^u$ (II A 7 c, Nr. 12, *Sommerfeld*). *Ch. M. Mason*[64]) gelangt durch Betrachtung des einfachen Integrales $\int_a^b y'^2 dx$ mit der Nebenbedingung:

$$\int_a^b A(x) y^2 dx = 1 \qquad (A(x) > 0)$$

zu einer Behandlung der gewöhnlichen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' + \lambda A(x) y = 0$ (II A 7 a, *Bôcher*). Er bestätigt die in der Physik aus blossen Analogiegründen zugelassene Annahme, dass zu jeder „homogenen" Randbedingung unendlich viele „ausgezeichnete" Werte von λ gehören, und insbesondere, dass es bei periodischem $A(x)$ unendlich viele Werte von λ giebt, für welche die Gleichung periodische Lösungen besitzt[65]).

64) Diss. Gött. 1903, p. 29 ff. Diese Beweismethode ist nachgebildet der von *H. Weber* (Math. Ann. 1 (1869), p. 1) auf die partielle Differentialgleichung der schwingenden Membran (II A 7 c, Nr. 9, *Sommerfeld*) angewandten Betrachtungsweise. Ihre Durchführung bei *Mason* ist aber nicht überall einwandfrei.

65) l. c. p. 52 ff.

(Abgeschlossen im Januar 1904.)

II A 9a. TRIGONOMETRISCHE INTERPOLATION
(MATHEMATISCHE BEHANDLUNG PERIODISCHER NATURERSCHEINUNGEN)

VON

H. BURKHARDT

IN ZÜRICH.

Inhaltsübersicht.

1. Bezeichnungen.
2. Hülfsformeln.
3. Vorgeschichte.

I. Erscheinungen mit einer bekannten Periode.

4. Die Begründung der trigonometrischen Interpolation für äquidistante Argumente durch *Fr. W. Bessel.*
5. Trigonometrische Interpolation für beliebige Argumente.
6. Trigonometrische Interpolation für sehr zahlreiche Argumente.
7. Das Verfahren von *Leverrier.*
8. Interpolation ausgefallener Beobachtungen.
9. Berechnung des Mittelwertes einer periodischen Funktion.
10. Behandlung der Extreme bei trigonometrischer Interpolation.
11. Berechnung des Ganges einer periodischen Erscheinung während einer längeren Periode aus Mittelwerten für kürzere Zeiträume.
12. Verwendung der trigonometrischen Interpolation zu mechanischer Quadratur. Berechnung der Koeffizienten trigonometrischer Entwicklungen aus möglichst wenig Beobachtungen.
13. Trigonometrische Interpolation von Funktionen zweier Argumente.

II. Separation mehrerer bekannter Perioden.

14. Vorbemerkungen, insbesondere über theoretische und praktische Inkommensurabilität.
15. Elimination von säkularen Störungen.
16. Separation zweier Perioden von gleicher Grössenordnung.
17. Verfahren in komplizierteren Fällen. Die harmonische Analyse der Gezeiten.
18. Bestimmung der Komponenten aus Beobachtungen der Extrema allein.
19. Abgekürztes Verfahren.
20. Zusammenfassung mehrerer periodischer Terme zu einem einzigen von veränderlicher Amplitude und Phase.

III. Aufsuchung versteckter Periodizitäten.

21. Die Methode von *Lagrange*.
22. Die Sätze von *Nervander* und *Buys-Ballot*.
23. Pulling und Pushing.
24. Neuere Ansätze.
25. Kritik vom Standpunkte der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

IV. Hülfsmittel zur Ausführung der Rechnungen.

26. Rechenschemata für spezielle Werte der Anzahl Beobachtungen.
27. Tabellen und Schablonen.
28. Instrumentelle Hülfsmittel zum Rechnen mit den Formeln.
29. Hülfsmittel zur Ableitung der Formeln (harmonische Analysatoren).
30. Hülfsmittel zur Trennung verschiedener Perioden und zur Aufsuchung versteckter Periodizitäten.

Litteratur.

Ein zusammenfassendes Lehrbuch über den ganzen hier behandelten Fragenkomplex existiert nicht; die einzelnen Untersuchungen sind von Vertretern der verschiedenen Anwendungen nach Bedürfnis behandelt worden, sehr häufig ohne Kenntnis davon, dass sie bei Gelegenheit einer anderen Anwendung bereits erledigt waren.

Eine ausführlichere Darstellung der historischen Entwicklung findet sich bei *H. Burkhardt*, Jahresbericht d. M.-V. 10, 1902, § 25, p. 228—342; eine spezielle Geschichte der meteorologischen Anwendungen bei *A. Schmidt*, Progr. Gotha 1894.

1. Bezeichnungen. Als *periodisch mit der Periode T* (im *engeren* Sinne) wird eine Funktion einer unabhängigen Veränderlichen t zunächst dann bezeichnet, wenn sie sich bei Vermehrung des Arguments um T nicht ändert, wenn also für jedes t:

$$f(t+T) = f(t) \tag{1}$$

ist. Die einfachsten Funktionen dieser Art sind diejenigen, die die Gleichung einer *„einfachen harmonischen Schwingung“* geben:

$$y = A\cos kt + B\sin kt = R\sin(kt+\alpha) = R\cos k(t-t_0); \tag{2}$$

$k = 2\pi/T$ heisst *Schwingungszahl*, A und B *Koeffizienten*, R *Amplitude**), R^2 *Intensität*, α *Phasenkonstante*, t_0 *Epoche* (des Maximums). Eine Funktion, deren Periode ein Submultiplum von T ist, ist zugleich eine Funktion von der Periode T; desgleichen eine Summe von solchen Funktionen. Eine Summe von einfachen Schwingungen, deren Perioden alle Submultipla von einer von ihnen sind, heisst eine

*) In der Litteratur findet man häufig auch $2R$ als Amplitude oder „range“ bezeichnet.

zusammengesetzte Schwingung; der zur grössten Periode gehörige Bestandteil, in erweitertem Gebrauch eines akustischen Terminus, *Grundton*, die übrigen seine *Obertöne*. Dass jede analytische periodische Funktion durch eine zusammengesetzte Schwingung dargestellt werden kann, kann vermittelst der Substitution $z = e^{it}$ aus dem *Laurent*'schen Satze (II B 1, Nr. 9, *Osgood*) abgeleitet werden[1]); die Frage, wie weit auch nicht analytische Funktionen eine solche Darstellung zulassen, ist für die hier zu besprechenden Aufgaben irrelevant.

Wo im folgenden von solchen periodischen Funktionen im engeren Sinne die Rede ist, wird zur Vereinfachung der Formeln stets angenommen, die Einheit, in der die Variable t gemessen wird, sei so gewählt, dass die Periode des Grundtons gleich 2π ist[2]).

In *weiterem* Sinne wird hier eine Funktion auch dann noch als periodisch bezeichnet, wenn sie sich durch eine Summe von Termen der Form (2) — ihren *Komponenten* — ausdrücken lässt, auch ohne dass die Perioden der einzelnen Komponenten Submultipla von einer von ihnen zu sein brauchen.

Im folgenden wird die (an und für sich natürlich unbestimmte) Aufgabe[3]) behandelt, von einer solchen Funktion einen analytischen Ausdruck zu finden, wenn zu einer Anzahl Argumentwerte t_μ die zugehörigen Funktionswerte y_μ gegeben sind. Diese Werte y_μ sollen dabei kurz als die *Beobachtungen* bezeichnet werden, die Werte t_μ als ihre *Argumente* oder auch als ihre *Termine*. Das Intervall zwischen dem ersten und dem letzten Beobachtungstermin heisst der *Beobachtungszeitraum*.

2. Hülfsformeln. Von den für das Rechnen mit trigonometrischen Interpolationsformeln fundamentalen Relationen

$$(3)\qquad \begin{cases} \sum_{\mu=1}^{m} \sin \mu t = \dfrac{\sin \dfrac{mt}{2} \sin \dfrac{(m+1)t}{2}}{\sin \dfrac{t}{2}}, \\ \sum_{\mu=0}^{m} \cos \mu t = \dfrac{\cos \dfrac{mt}{2} \sin \dfrac{(m+1)t}{2}}{\sin \dfrac{t}{2}} \end{cases}$$

1) *A. Cauchy*, Par. C. R. 12 (1841), p. 323; Oeuvres (1) 6, p. 79.

2) *A. Schuster*, Terr. Magn. 3 (1898), Nr. 15, p. 35 schlägt vor: Von einer „Periodizität T" solle man nur dann reden, wenn die Funktion in der Zeit T nur ein Maximum und ein Minimum erreicht; die Gesamtheit der zu T und seinen Submultiplis gehörenden Terme könne man eine „Oscillation" oder eine „Variation" nennen.

3) Der Name *„harmonische Analyse"* für die Lösung dieser Aufgabe scheint

oder

$$\frac{1}{2}+\sum_{\mu=1}^{m}\cos\mu t=\frac{\sin\frac{(2m+1)t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}$$

ist die erste der Sache nach in einem Satz des *Archimedes*[4]) enthalten, die zweite in der zweiten Form von *W. Snellius*[5]) gegeben. Die allgemeineren Formeln:

$$(4)\qquad \begin{cases} \sum_{\mu=0}^{m}\sin(a+\mu t)=\dfrac{\sin\left(a+\frac{mt}{2}\right)\sin\frac{(m+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}, \\ \sum_{\mu=0}^{m}\cos(a+\mu t)=\dfrac{\cos\left(a+\frac{mt}{2}\right)\sin\frac{(m+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \end{cases}$$

gewinnt *L. Euler*[6]), indem er die linken Seiten als rekurrierende Reihen auffasst. Der bequemste Weg, um sie ohne Benutzung komplexer Grössen zu erhalten, ist Multiplikation der linken Seiten (nicht mit $2\sin t$ oder $2\cos t$, sondern) mit $2\sin t/2$ und Umformung der auftretenden Produkte je zweier trigonometrischen Funktionen in Summen von solchen[7]).

---

um 1860 in England in Gebrauch gekommen zu sein; einen bestimmten Urheber kann ich für ihn nicht angeben. Er hat übrigens Sinn nur für die unter I zu besprechenden Aufgaben; seine Anwendung auf die unter II zu besprechenden ist eine — wohl nicht mehr auszurottende — Gedankenlosigkeit.

4) De sphaera et cylindro, prop. 22; Opera ed. Heiberg 1, p. 98. Vgl. *G. Eneström,* Bibl. math. (3) 2 (1901), p. 444.

5) Doctrinae triangulorum canonicae libri quatuor, 1627 (posthum), prop. 3, p. 44; vgl. *A. Braunmühl,* Geschichte der Trigonometrie 1, Leipzig 1900, p. 240.

6) Misc. Berol. 7 (1743), p. 133. — Introd. in analysin infinitorum 1, Laus. 1748, Nr. 259, p. 218 erhält *Euler* die Formeln (4) als Differenzen zweier divergenter unendlicher Reihen; Petrop. N. Comm. 18 (1773) [74], p. 26 durch Benutzung der Beziehungen zwischen trigonometrischen Funktionen reeller und Exponentialfunktionen rein imaginärer Argumente.

Auf Identitäten der im Text erwähnten Art, bezw. auf entsprechende Relationen für Summen von Potenzen trigonometrischer Funktionen lässt sich auch ein Teil der 1746 von *M. Stewart* ohne Beweis mitgeteilten „general theorems" zurückführen. Vgl. darüber *L. Ellis,* Cambr. Math. J. 2 (1841), p. 271; *T. S. Davies,* Edinb. Trans. 15 (1844), p. 573 (p. 603 Angaben über ältere mir nicht zugängliche Litteratur); Cambr. Dubl. math. J. 1 (1846), p. 229; *P. Breton (de Champ),* J. de math. 13 (1848), p. 281.

7) Diese Bemerkung *A. J. Lexell*'s (Petrop. N. Comm. 18 (1773) [74], p. 38) ist später vielfach nicht beachtet und von *Dippe* (Arch. Math. 7 (1846), p. 110) aufs neue gemacht worden.

Setzt man in den Gleichungen (3) $t = 2\varkappa\pi/n$, unter $\varkappa$ eine ganze Zahl verstanden, so erhält man:

$$(5)\qquad \sum_{\nu=1}^{n-1} \sin\frac{2\varkappa\nu\pi}{n} = 0, \quad \sum_{\nu=0}^{n-1} \cos\frac{2\varkappa\nu\pi}{n} = \begin{cases} 0 \text{ für } \varkappa \not\equiv 0, \\ n \text{ für } \varkappa \equiv 0 \end{cases} \pmod n$$

und daraus wieder mit Hülfe der Umformung von Produkten trigonometrischer Funktionen in Summen:

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n-1} \cos\frac{2\varkappa\nu\pi}{n}\cos\frac{2\lambda\nu\pi}{n} \\ \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n-1} \sin\frac{2\varkappa\nu\pi}{n}\sin\frac{2\lambda\nu\pi}{n} \end{array}\right\} \\ = \begin{cases} 0, & \text{wenn weder } \varkappa+\lambda, \quad \text{noch} \quad \varkappa-\lambda \equiv 0 \pmod n, \\ \frac{n}{2}, \text{ bezw. } \pm\frac{n}{2}, & \text{wenn } \varkappa+\lambda \equiv 0 \textit{ oder } \varkappa-\lambda \equiv 0 \pmod n, \\ n, \text{ bezw. } 0, & \text{wenn } \varkappa+\lambda \equiv 0 \textit{ und } \varkappa-\lambda \equiv 0 \pmod n, \end{cases} \\ \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n-1} \sin\frac{2\varkappa\nu\pi}{n}\cos\frac{2\lambda\nu\pi}{n} = 0 \quad \text{in jedem Falle.} \end{array}\right.$$

3. Vorgeschichte. Das Problem, eine gegebene Funktion $y = f(t)$ in eine Reihe der Form

$$(7)\qquad y = \sum_{\mu=0} A_\mu \cos\mu t$$

zu entwickeln, behandelt schon *A. Clairaut*[8]) als Interpolationsproblem: Er setzt für t der Reihe nach die Werte

$$(8)\qquad \frac{2\pi}{m}, \frac{4\pi}{m}, \frac{6\pi}{m}, \ldots$$

und erhält so wegen (5) zunächst:

$$(9)\qquad A_0 = \frac{1}{m}\sum_{\nu} f\left(\frac{2\nu\pi}{m}\right).$$

Dieselbe Formel liefert ihm auch die übrigen Koeffizienten, wenn vorher in dem Produkt $f(t)\cos\mu t$ die Produkte je zweier Kosinus

8) Par. Hist. 1754 (59), art. 4, p. 545 (vom Juli 57). *Clairaut*'s Formeln sind nur richtig, wenn die Anzahl der zu berücksichtigenden Reihenglieder $\leqq m$ ist. Die Schlussformeln waren für die speziellen Werte $m = 1, 2, 3$ bereits von *Euler* in etwas versteckter Form angegeben worden (sur les inégalités du mouvement de Jupiter et de Saturne, Paris 1749, § 27, p. 28; die Abhandlung gehört zum 6. oder 7. Band des Pariser recueil des pièces qui ont remporté le prix), doch ohne Beweis, sodass nicht ersichtlich ist, ob er sie direkt als Interpolationsformeln, oder als Näherungsausdrücke für die Darstellung der Entwicklungskoeffizienten der unendlichen Reihe durch bestimmte Integrale (17) gefunden hat.

durch Summen ersetzt werden. Andererseits wurde *J. L. Lagrange* bei seinen ersten Untersuchungen über Saitenschwingungen auf das Problem geführt, ein System von Gleichungen der Form

$$(10) \qquad Y_\nu = \sum_{\mu=1}^{m-1} B_\mu \sin \frac{\mu\nu\pi}{m} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, m-1)$$

nach den B aufzulösen[9]); er reduziert es auf die Auflösung eines rekurrierenden Systems linearer Gleichungen und erhält so nach längerer Rechnung:

$$(11) \qquad B_\mu = \frac{2}{m} \sum_{\nu=1}^{m-1} Y_\nu \sin \frac{\mu\nu\pi}{m}.$$

Doch hebt er erst an späterer Stelle[10]) ausdrücklich hervor, dass durch diese Formeln die Aufgabe gelöst ist, durch $m-1$ Punkte mit äquidistanten Abscissen eine aus $m-1$ Sinuslinien zusammengesetzte Kurve zu legen.

In allgemeinerer Weisse fasst *Lagrange* das Problem trigonometrischer Interpolation bei Gelegenheit der Frage nach der Bestimmung der Ungleichheiten der Planetenbahnen nur aus Beobachtungen, indem er hier nicht nur die Amplituden, sondern auch die Phasenkonstanten und die Perioden selbst als unbekannt ansieht[11]).

Auch *J. H. Lambert* empfiehlt den Gebrauch trigonometrischer Interpolationsformeln bei „krummen Linien, die sich schlangenweise auf- und abwärts ziehen", doch nur unter der Voraussetzung einer periodischen Wiederkehr der einzelnen „Anomalien" und ohne Angabe einer Methode zur Bestimmung der Koeffizienten[12]).

I. Erscheinungen mit einer bekannten Periode.

4. Die Begründung der trigonometrischen Interpolation für äquidistante Argumente durch Fr. W. Bessel. Das allgemeine Pro-

9) Taur. Misc. 1 (1759), Nr. 26; Oeuvres 1, p. 87.

10) ib. 3^2 (1762/65), Nr. 40; Oeuvres 1, p. 552. Dass hier wirklich nur von Interpolationsformeln und nicht, wie man aus der Bezeichnung schliessen könnte, von Entwicklung in unendliche trigonometrische Reihen die Rede ist, geht aus späteren Äusserungen *Lagrange*'s (z. B. mécanique analytique, 2e éd., Paris 1811 (also *nach Fourier*), II VI, Nr. 59; Oeuvres 11, p. 436) unzweifelhaft hervor.

11) Par. Hist. 1772^1 (75), p. 513; Oeuvres 6, p. 505. Näheres unten Nr. **21**.

12) Beyträge zum Gebrauch der Mathematik 3, Berlin 1772, V § 8, p. 74. — In *Lambert*'s posthumer Pyrometrie, Berlin 1779, die zuweilen hier zitiert wird, ist nicht von trigonometrischer Interpolation die Rede, sondern von Entwicklung einer analytischen Funktion in eine unendliche trigonometrische Reihe (§ 600, p. 317). — In *Tobias Mayer*'s op. ined., Gött. 1775, die auch manchmal genannt werden, handelt es sich nur um näherungsweise Darstellung von Beobachtungen durch *eine* trigonometrische Funktion.

blem der Bestimmung der Koeffizienten in der trigonometrischen Interpolationsformel[13]):

$$Y = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{\mu=1}^{m} \{A_\mu \cos \mu t + B_\mu \sin \mu t\} \tag{12}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{m} R_\mu \sin \mu (t - t_\mu) \tag{13}$$

aus den Funktionswerten, die zu gegebenen, von einander und von den Enden der Periode äquidistanten Argumentwerten gehören, also der Auflösung des Gleichungssystems:

$$Y_\nu = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{\mu=1}^{m} \left\{ A_\mu \cos \frac{2\mu\nu\pi}{n} + B_\mu \sin \frac{2\mu\nu\pi}{n} \right\} \tag{14}$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

nach den A_μ, B_μ, ist zuerst von *Fr. W. Bessel* gelegentlich der Untersuchung der Fehler eines geteilten Kreises erledigt worden[14]). *Bessel* fasst sofort den Fall ins Auge, dass die Anzahl n der Gleichungen grösser ist, als die Anzahl $2m + 1$ der Unbekannten. Die „wahrscheinlichsten" Werte der letzteren werden dann erhalten, wenn man die Summe der Quadrate der Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung zum Minimum macht (I D 2, Nr. **1**, *Bauschinger*); die aus dieser Forderung entspringenden Gleichungen reduzieren sich vermöge der Relationen (6) auf[15]):

---

13) Ob (12) oder (13) vorzuziehen sei, darüber ist gestritten worden; (12) ist bequemer zu berechnen, (13) bequemer zu benutzen.

14) Königsb. Beob. 1 (1815), p. III (Ges. Abh. 2, p. 24). Ein Hinweis auf die praktische Zweckmässigkeit solcher Formeln für die Darstellung periodischer Naturerscheinungen schon in einer Rezension *Bessel*'s, Jenaische Litteraturz. 1814[4], p. 412 (Rezensionen, p. 190). Vgl. auch *Bessel*'s Brief an *Gauss* vom Dez. 1813, Briefwechsel p. 182, 187.

15) Die aus den Formeln (15) hervorgehende Eigenschaft der „wahrscheinlichsten" Werte der Koeffizienten, dass sie unabhängig sind von der Anzahl der Glieder, die man berücksichtigen will, ist von *Bessel* ausdrücklich ausgesprochen worden und z. B. den Meteorologen immer geläufig geblieben. In anderen Kreisen ist sie in Vergessenheit geraten und für den Grenzfall $n = \infty$, in dem Integrale an Stelle der Summe treten, von *G. Plarr* (Par. C. R. 44 (1857), p. 984), dann von *A. Töpler* (Wien. Akad. Anzeiger 1876, p. 205), endlich von *Kirsch* (die Bewegung der Wärme in den Cylinderwandungen der Dampfmaschine, Leipzig 1886, Nr. 6, p. 25) von neuem entdeckt worden. Sie gilt übrigens nur, solange die Anzahl der Gleichungen nicht kleiner als die der zu bestimmenden Koeffizienten ist, was zuweilen übersehen worden ist (z. B. noch ganz neuerdings von *M. Lévy*, Théorie des marées 1 (1898), Nr. 48, p. 78). Namentlich ist, wenn aus einer geraden Anzahl von Beobachtungen $n = 2l$ eine ebenso grosse Anzahl von

$$(15)\qquad \begin{cases} nA_\mu = 2\sum_{\nu=0}^{n-1} Y_\nu \cos\frac{2\mu\nu\pi}{n}, \\ nB_\mu = 2\sum_{\nu=0}^{n-1} Y_\nu \sin\frac{2\mu\nu\pi}{n}. \end{cases}$$

Ein späterer Aufsatz *Bessel*'s giebt noch den folgenden Ausdruck für die Summe der Fehlerquadrate[16]):

Koeffizienten bestimmt werden soll, der letzte Koeffizient A_l nur gleich der Hälfte des unter (15) angegebenen Wertes (so richtig schon bei *Gauss* [17]), Nr. 22, p. 299; neuerdings hervorgehoben von *F. R. Helmert*, Ausgleichungsrechnung, Leipzig 1872, § 32, p. 287; *T. R. Robinson*, Lond. Trans. 165 (1876), p. 420; *K. Weihrauch*, Dorp. Schriften 5 (1890), p. 15; *P. S. Schreiber*, N. A. Leop. 58 (1892), p. 171; *H. Pipping*, Fenn. Acta 20^{11} (1895), p. 18; *J. Macé de Lépinay*, J. de phys. (3) 8 (1899), p. 141; *H. Bruns*, Grundlinien des wissensch. Rechnens, Leipzig 1903, § 83, p. 117).

16) Astr. Nachr. 6 (1828), col. 333; Ges. Abh. 2, p. 368; engl. Quarterly weather report 1870. *Bessel* selbst macht (Nr. 4) darauf aufmerksam, dass man aus dieser Formel auf die wahrscheinlichen Fehler der *Beobachtungen* nur schliessen könne „wenn anderweitig bekannt ist, wo der Ausdruck abbricht". Ob ein solcher Rückschluss unter speziellen Verhältnissen nicht doch möglich sei, darüber ist neuerdings aus Anlass der harmonischen Analyse der Töne der menschlichen Stimme diskutiert worden. Geht man von der Voraussetzung aus, dass dem einzelnen beobachteten Wert ein bestimmter wahrscheinlicher Fehler zukomme, so ergeben die I D 2, Nr. 11 (*Bauschinger*) angegebenen Formeln bestimmte Werte für die wahrscheinlichen Fehler der Koeffizienten und für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der wirkliche Fehler ein bestimmtes Vielfaches des „wahrscheinlichen" übersteigt. Noch kleiner ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der wirkliche Fehler des einzelnen Koeffizienten dessen wahren Wert annähernd aufhebt, ungeheuer klein die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dies bei einer grösseren Anzahl von Koeffizienten gleichzeitig eintritt. Man wird also, wenn sich für die Koeffizienten von einer bestimmten Stelle an sehr kleine Werte ergeben, zu der Vermutung berechtigt sein, dass die wahren Werte dieser Koeffizienten null sind; ist diese Vermutung zutreffend, so erlaubt die Übereinstimmung der Beobachtungen mit der Rechnung nach der abgekürzten Formel den Rückschluss auf die Genauigkeit der ersteren. Die Entscheidung darüber, ob die Voraussetzungen dieser Schlüsse im einzelnen Fall erfüllt sind, ist nicht Sache der Mathematik; sie sind es jedenfalls nicht, wenn Grund zu der Annahme vorliegt, dass die höheren Koeffizienten nicht wirklich null sind. Vgl. *H. Pipping*, Zeitschr. Biol. 27 (1890), p. 273; 31 (1895), p. 550; Fenn. Acta 20^{11}, (1895), p. 19; *E. Lindelöf*, ib. p. 63; 29^9 (1901); Arch. Physiol. 87 (1901), p. 597; *Lindelöf* und *Pipping*, ib. 85 (1901), p. 59; 91 (1902), p. 310. Andererseits *L. Hermann*, ib. 61 (1895), p. 176; 83 (1901), p. 33; 86 (1901), p. 92; 89 (1902), p. 600. — Bestimmung der wahrscheinlichen Fehler der Koeffizienten aus denjenigen der Beobachtungen auch bei *R. Strachey*, Lond. Roy. Proc. 42 (1887), Nr. 5, p. 65.

$$(16)\quad \sum_{\nu=0}^{n-1}\left\{Y_\nu - \frac{1}{2}A_0 - \sum_{\mu=1}^{m}\left(A_\mu \cos\frac{2\mu\nu\pi}{n} + B_\mu \sin\frac{2\mu\nu\pi}{n}\right)\right\}^2 = \sum_{\nu=0}^{n-1} Y_\nu^2 - \frac{n}{4}A_0^2 - \frac{n}{2}\sum_{\mu=1}^{m}(A_\mu^2 + B_\mu^2).$$

Für den speziellen Fall, dass die Anzahl der Gleichungen gleich der der Unbekannten ist, sind die Formeln (15) schon vor *Bessel* von *C. Fr. Gauss*[17]) und von *J. J. Fourier*[18]) gefunden, aber nicht publiziert worden.

Sieht man die gegebenen Funktionswerte Y_ν als spezielle Werte einer für ein stetig veränderliches Argument t definierten Funktion $y = f(t)$ an, so kann man die Koeffizienten ihrer Entwicklung nach den trigonometrischen Funktionen der Vielfachen von t durch die in Artikel 9b näher zu besprechenden Integralformeln:

$$(17)\quad A_\mu^{(\infty)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos\mu t\,dt, \quad B_\mu^{(\infty)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin\mu t\,dt$$

darstellen. Die Gleichungen (15) ergeben sich auch, wenn man diese Integrale näherungsweise nach der Rechtecksformel berechnet. Wendet man statt dessen die Trapezformel (II A 1, Nr. **51**, *Voss*) an, so erhält man Werte, die noch die Faktoren enthalten[19]):

$$(18)\quad \frac{4n^2}{\mu^2\pi^2}\sin^2\frac{\mu\pi}{2n}.$$

Zwischen den genauen Werten (17) und den angenäherten (15) (oder überhaupt zwischen den aus einer grösseren und den aus einer

---

17) Werke 3, Nr. 20, p. 295; (aus dem J. 1805, vgl. Briefwechsel mit *Olbers*, p. 281, 286). *Gauss* setzt voraus, dass das Beobachtungsintervall ein aliquoter Teil der Periode sei, aber nicht, dass eine Beobachtung auf den Anfang der Periode falle.

18) Théorie analytique de la chaleur, Paris 1822, Nr. 271 (Oeuvres 1, p. 287; die bez. Untersuchungen gehören nach *Fouriers*'s eigener Mitteilung Par. mém. 1821/22 (26), (Oeuvres 2 p. 94) zu seinen ältesten, fallen also vor 1807). Bei *S. D. Poisson* steht J. éc. polyt. cah. 19 (1823), Nr. 62, p. 444 und Théorie de la chaleur, Paris 1835, Nr. 101, p. 200 nur *Lagrange*'s Formel (11).

19) *Kirsch*, [15]) Nr. 7, p. 29; auch *P. Schreiber*'s näherungsweise Berechnung der Koeffizienten (N. A. Leop. 58 (1892), I B, p. 152) kommt auf die Trapezformel hinaus. — Man sieht aus der Vergleichung beider Arten von Formeln deutlich, dass man die aus n Beobachtungen berechneten Koeffizienten sicher nur soweit als zuverlässig betrachten kann, als die Faktoren (18) nicht wesentlich von 1 verschieden sind; das ist nicht immer beachtet worden, z. B. nicht in der Diskussion über den täglichen Gang der Temperatur [45]) und auch nicht in der Polemik *Hermann-Lindelöf* [16]).

kleineren Anzahl von Beobachtungen berechneten) Werten der Koeffizienten bestehen die Relationen[20]):

$$(19)\qquad \begin{cases} A_\mu = A_\mu^{(\infty)} + \sum_{s=1}^{\infty}(A_{\mu+sn}^{(\infty)} + A_{\mu-sn}^{(\infty)}) \\ B_\mu = B_\mu^{(\infty)} + \sum_{s=1}^{\infty}(B_{\mu+sn}^{(\infty)} - B_{\mu-sn}^{(\infty)}) \end{cases}$$

(aber $A_l = A_l^{(\infty)} + A_{3l}^{(\infty)} + A_{5l}^{(\infty)} + \cdots$, wenn $n = 2l$).

Dass die Formel (12) eben nur eine Interpolationsformel ist, unter die sich beliebige Beobachtungen zwingen lassen, dass also aus der Möglichkeit, eine bestimmte Beobachtungsserie mit ihr darzustellen, nicht auf eine physikalische Bedeutung ihrer einzelnen Terme und ihrer Koeffizienten geschlossen werden darf, haben schon *J. Lamont*[21]) und *Bravais*[22]) hervorgehoben; gleichwohl ist noch neuerdings öfters die entgegengesetzte Auffassung laut geworden[23]).

In komplexer Gestalt treten die trigonometrischen Interpolationsformeln bei *A. Cauchy* auf[24]).

Trigonometrische Interpolationsformeln, in denen nur ungerade Vielfache des Arguments erscheinen, geben *E. H. Dirksen*[25]), *K. Weihrauch*[26]) und *L. Gegenbauer*[27]).

5. Trigonometrische Interpolation für beliebige Argumente. Sind die gegebenen Argumente nicht äquidistant, so erhält man zunächst in Analogie mit der *Lagrange*'schen Interpolationsformel für rationale Funktionen (I D 3, Nr. 3, *Bauschinger*) die Formel:

---

20) Die Formeln für die A schon bei *Euler*, Petrop. N. Acta 11 (1793) (98), Nr. 28, p. 111 (von 1777); auch die für die B bei *Gauss* [17]), Nr. 21, p. 298; neuerdings bei *Helmert* [15]); *K. Weihrauch*, Dorp. Schriften 4 (1888), p. 33; *L. Grossmann*, Hamb. Seewarte Arch. 17[5] (1894), p. 1. (Bei *H. Bruns*, Grundlinien [15]), § 83, p. 116 die Gleichung für A_l richtig, nur die Bezeichnung anders.)

21) Münch. Abh. 3 (1843), p. 82.

22) Voyages de la commission scientifique du Nord, publiés sous *P. Gaimard*, météorologie t. 2, Paris o. J. [zwischen 1844 und 1848], p. 305.

23) *B. A. Gould*, Amer. J. of sci. 119 (1880), p. 212; *L. Grossmann* [17]) p. 3. *A. Nippoldt* jun. (Zeitschr. math. Unterr. 29 (1898), p. 401; weniger schroff Hamb. Seewarte Archiv 26 (1903), p. 3) stellt die letztere Auffassung als die „meteorologische" der ersteren als der „mathematischen" gegenüber.

24) Extrait du mém. prés. à l'acad. de Turin le 11. oct. 1831, Turin 1832 (lith.), p. 117; ital. opuscoli mat. e fis. di diversi autori 2 (1834), p. 99 des S.-A. Dann Par. C. R. 12 (1841), p. 290; Oeuvres (1) 6, p. 69.

25) Berl. Abh. 1827 (30), § 7, p. 101.

26) Dorp. Schriften 4 (1888), p. 15, 41.

27) Wien. Ber. 100[2a] (1891), § 2, p. 655.

$$(20) \qquad Y = \sum \frac{\sin \frac{1}{2}(t-b) \sin \frac{1}{2}(t-c) \dots}{\sin \frac{1}{2}(a-b) \sin \frac{1}{2}(a-c) \dots} f(a),$$

deren Glieder durch Vertauschung der Termine $a, b, c, \dots$ auseinander hervorgehen[28]); ist die Anzahl der Beobachtungen ungerade, so lässt sich ihre rechte Seite nach den Funktionen der Vielfachen von t entwickeln[29]). Für eine gerade Anzahl von Beobachtungen leistet dasselbe die Formel[30]):

$$(21) \qquad Y = K \sin \tfrac{1}{2}(t-a) \sin \tfrac{1}{2}(t-b) \dots + \sum \frac{\sin \frac{1}{2}(t-b) \sin \frac{1}{2}(t-c) \dots}{\sin \frac{1}{2}(a-b) \sin \frac{1}{2}(a-c) \dots} \cos \tfrac{1}{2}(t-a) f(a),$$

in der K willkürlich bleibt. Sollen nur Kosinus- oder nur Sinusglieder auftreten, so kann man

$$(22) \qquad Y = \sum \frac{(\cos t - \cos b)(\cos t - \cos c) \dots}{(\cos a - \cos b)(\cos a - \cos c) \dots} f(a),$$

bezw.

$$(23) \qquad Y = \sum \frac{\sin t (\cos t - \cos b)(\cos t - \cos c) \dots}{\sin a (\cos a - \cos b)(\cos a - \cos c) \dots} f(a)$$

benutzen[31]).

6. Trigonometrische Interpolation für sehr zahlreiche Argumente. Sollen aus einer grossen Anzahl von Beobachtungen nur eine verhältnismässig kleine Anzahl von Koeffizienten berechnet werden, so kann man sich eines Interpolationsverfahren von *P. L. Tschebyscheff* bedienen[32]), das die gegebenen Funktionswerte nur durch Addition und Subtraktion verbindet und von dem *H. Bruns*[33]) gezeigt hat, dass

---

28) *A. Cauchy,* Par. C. R. 12 (1840), p. 290 (Oeuvres (1) 6, p. 69); *Gauss* [17]) Nr. 10, p. 279. — *H. Bruns* (Grundlinien [15]), § 91, p. 129) stellt die Frage, wie man durch zweckmässige Wahl der Termine $a, b, c, \dots$ den Einfluss der Beobachtungsfehler auf die Resultate herabdrücken könne.

29) Diese von *Gauss* nur postulierte Rechnung wird von *K. Weihrauch* durchgeführt, Dorp. Schriften 4 (1888), p. 2. Er behandelt auch speziell den Fall, dass man ausser einer vollständigen Serie äquidistanter Beobachtungen noch einige überzählige hat (ib. II 1, p. 33).

30) *Gauss,* Nr. 11, p. 281. Eine einfache Ableitung dieser Formel aus (20) bei *B. Baillaud,* Toulouse observ. ann. 2 B (1886), Nr. 9, p. 11.

31) *Gauss,* Nr. 16, p. 290.

32) Petersb. mém. (7) 1^5, 1859; Auszug Petersb. Bull. 16 (1858), col. 353 (Oeuvres 1, p. 385, 711). Erläuterungen und Beispiele auch bei *P. Backlund,* Petersb. Bull. 28 (1884), col. 477; *P. Harzer,* Astr. Nachr. 115 (1886), col. 337; *R. Radau,* Bull. astron. 8 (1890) (auch sep. Paris 1891), Nr. 34, p. 425.

33) Astr. Nachr. 146 (1898), col. 161; übersichtlicher Grundlinien [15]), § 93, p. 130. Dort auch § 98, p. 136 Erörterung der Frage, welchen Einfluss Fehler der Funktionswerte auf die nach (25) berechneten Koeffizienten haben (der Fehler reduziert sich erst bei Bildung von (25), nicht schon in (24)).

es sich besonders für trigonometrische Interpolation eignet. Man bilde die Summen:

$$(24)\quad \begin{cases} U_n = \frac{1}{2n}\left\{\sum_{\nu=0}^{n-1} f\left(\frac{4\nu \cdot 2\pi}{4n}\right) - \sum_{\nu=0}^{n-1} f\left(\frac{(4\nu+2)\cdot 2\pi}{4n}\right)\right\}, \\ V_n = \frac{1}{2n}\left\{\sum_{\nu=0}^{n-1} f\left(\frac{(4\nu+1)\cdot 2\pi}{4n}\right) - \sum_{\nu=0}^{n-1} f\left(\frac{(4\nu+3)\cdot 2\pi}{4n}\right)\right\}, \end{cases}$$

und aus ihnen:

$$(25)\qquad A_\mu = \sum_k a_{2k+1} U_{(2k+1)\mu}, \quad B_\mu = \sum_k b_{2k+1} V_{(2k+1)\mu}.$$

Dabei bedeutet a_k die Zahl 0 oder $+1$ oder -1, je nachdem k durch das Quadrat einer Primzahl teilbar oder ein Produkt einer geraden oder einer ungeraden Anzahl verschiedener Primfaktoren ist[34]), b_k ist $= i^{k-1} a_k$. Gehören die gegebenen Argumente nicht zu den in (24) angenommenen, so sind die Summen so zu bilden, dass die Vorzeichenwechsel möglichst nahe an den richtigen Stellen eintreten.

7. Das Verfahren von Leverrier. Die Formeln von Nr. 4 haben den Nachteil, dass man mit ihnen die ganze Rechnung noch einmal vornehmen muss, wenn es sich nachträglich als erforderlich erweist, eine grössere Anzahl von Beobachtungen zu berücksichtigen, als man ursprünglich in Aussicht genommen hatte[35]). Diese Schwierigkeit fällt nach einer Bemerkung von *U. J. Leverrier*[36]) weg, wenn man die Argumente zwar in gleichen Abständen α von einander, aber so wählt, dass α zur Periode praktisch inkommensurabel ist. *Leverrier*'s eigene Darstellung ist wenig übersichtlich; *J. F. Encke*[37]) und *G. J. Hoüel*[38]) haben sie vereinfacht. Letzterer gelangt schliesslich zu folgender Vorschrift[39]):

34) Also dasselbe, was in der Zahlentheorie (I C 3, *Bachmann*, Nr. 3) mit $\mu(k)$ bezeichnet wird.

35) *J. Macé de Lepinay* (J. de phys. (3) 8 (1899), p. 144) und *H. Bruns* (Grundlinien [15]), § 87, p. 122) zeigen, wie man in solchen Fällen zweckmässigerweise verfährt, um wenigstens einen Teil der Rechnung beibehalten zu können.

36) Par. observ. ann. 1 (1855), Nr. 24, p. 118 und add. 3, p. 384 (von 1843); eine Andeutung auch schon bei *A. Cauchy*, Par. C. R. 12 (1840) (Oeuvres (1) 6, p. 77). Eine ältere Veröffentlichung *Leverrier*'s „Développements sur qques. points de la théorie des perturbations des planètes" war mir nicht zugänglich; an sie knüpft *J. W. Lubbock* an, Phil. Mag. 33 (1848), p. 106.

37) Berl. astr. Jahrb. 1860, p. 313 (Ges. Abh. 1, p. 188).

38) Par. observ. mém. 8 (1865), p. 83 (Auszug Par. C. R. 53 (1861), p. 830); Prag Archiv 1 (1875) (auch sep. Paris 1875).

39) 1865, Nr. 27, p. 107; 1875, Nr. 6, p. 9 des S.-A. Für den Fall eines sehr grossen n rät *Hoüel* zu etwas anderer Anlage der Rechnung (Vertauschung der Summationsreihenfolge); 1865, Nr. 43, p. 124; 1875, Nr. 27, p. 26.

Aus den gegebenen Funktionswerten y bilde man die Kombinationen

$$V_\nu = y_\nu \pm y_{-\nu} \mp y_{\nu-1} - y_{-\nu+1} \tag{26}$$

(hier und in den folgenden Formeln sind einmal überall die oberen, dann überall die unteren Zeichen zu nehmen; dann die Hülfsgrössen)[40]:

$$\pi_\mu = 2^\mu \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{2\alpha}{2} \cdots \sin\frac{\mu\alpha}{2}, \quad \lambda_{\nu,h} = (-1)^{h+\nu} \frac{\pi_{2\nu-1}}{\pi_{\nu-h}\pi_{\nu+h-1}} \tag{27}$$

und aus beiden:

$$\begin{cases} \delta A_{0,\nu} = \dfrac{(-1)^\nu}{\pi_\nu^2}\left(\sum\limits_{h=1}^{\nu-1} \lambda_{\nu,h} V_h + V_\nu\right), \\ \delta z_{\mu,\nu} = \dfrac{(-1)^{\mu+\nu} 2 \sin\mu\alpha}{\pi_{\nu-\mu}\pi_{\nu+\mu}}\left(\sum\limits_{h=1}^{\nu-1} \lambda_{\nu,h} V_h + V_\nu\right), \\ z_{\nu,\nu} = \dfrac{1}{\pi_{2\nu}}\left(\sum\limits_{h=1}^{\nu-1} \lambda_{\nu,h} V_h + V_\nu\right); \end{cases} \tag{28}$$

dann ergeben sich für die Koeffizienten die Werte:

$$\left.\begin{matrix} A_\mu \sin\frac{1}{2}\mu\alpha \\ B_\mu \cos\frac{1}{2}\mu\alpha \end{matrix}\right\} = z_{\mu,\mu} + \sum_{\nu=\mu+1} \delta z_{\mu,\nu}, \quad A_0 = \sum_{\nu=1} \delta A_{0,\nu}. \tag{29}$$

O. Callandreau[41]) bemerkt, dass man in den Gleichungen (22) und (23) statt $\cos a$, $\cos b$, ... bezw. die drei ersten Dezimalstellen dieser Werte nehmen und Produkttafeln benutzen könne; das biete bei bequemerer Rechnung dieselben Vorteile wie *Leverrier*'s Verfahren.

8. Interpolation ausgefallener Beobachtungen. Für den Fall, dass aus einer Reihe sonst äquidistanter Beobachtungen einzelne ausgefallen sind und interpoliert werden sollen, kann man sich zunächst der linearen, bezw. parabolischen Interpolation bedienen. *L. Fr. Kämtz*[42]) empfiehlt, mit dem durch lineare Interpolation gefundenen Wert die Berechnung der Konstanten der *Bessel*'schen Formel vorzunehmen und aus dieser einen zweiten Näherungswert abzuleiten, der erforderlichenfalls zur Wiederholung des Verfahrens dienen kann. *Bessel* selbst giebt die Vorschrift[43]), man solle die betr. Terme in den Gleichungen (15) abtrennen, sodass sie lauten:

40) Tabelle der Logarithmen dieser Hülfsgrössen 1865, p. 146; ausführlicher 1875 auf besonderen Tafeln.

41) Ann. éc. norm. (2) 8 (1879), p. 232.

42) Lehrbuch der Meteorologie 1, Halle 1831, p. 67.

43) Astr. Nachr. 6 (1828), col. 333 (Ges. Abh. 2, Nr. 5, p. 368). Ähnlich verfährt auch *G. D. E. Weyer*, Ann. der Hydrogr. 16 (1888), p. 85. Eine Modifika-

$$(30)\quad \begin{cases} A_\mu = \frac{2}{n}\left\{\sum Y_\nu \cos\frac{2\mu\nu\pi}{n} + Y_h \cos\frac{2\mu h\pi}{n} + Y_k \cos\frac{2\mu k\pi}{n} + \cdots\right\}, \\ B_\mu = \frac{2}{n}\left\{\sum Y_\nu \sin\frac{2\mu\nu\pi}{n} + Y_h \sin\frac{2\mu h\pi}{n} + Y_k \sin\frac{2\mu k\pi}{n} + \cdots\right\}, \end{cases}$$

wo jetzt die Summen nur über die wirklich gemachten Beobachtungen zu erstrecken sind. Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichungen (14) ein, so erhält man zur Bestimmung der Unbekannten Gleichungen derselben Form wie (14). Nur ist zu beachten, dass in diesem Falle die Werte der Koeffizienten nicht mehr unabhängig davon sind, wie weit man mit ihrer Bestimmung gehen will. *K. Weihrauch* hat die von *Bessel* geforderte Rechnung allgemein durchgeführt[44]); es treten dabei Cirkulanten (I A 2, Nr. **16**, *Netto*) auf.

Selbstverständlich sind solche Interpolationen nur zulässig, wenn angenommen werden darf, dass während der Zeit, aus der keine Beobachtungen vorliegen, der Gang der Erscheinung denselben Gesetzen folgte, wie während der Zeit der Beobachtungen. Steht das nicht fest, oder weiss man etwa gar, dass das Gegenteil der Fall ist, so liegt nicht eine Interpolation, sondern eine unzulässige Extrapolation vor[45]).

9. Berechnung des Mittelwertes einer periodischen Erscheinung. Zur Berechnung des Mittelwertes einer periodischen Erscheinung dient die erste der Formeln (12)[46]). *H. Lloyd* hat auch bereits auf den Satz aufmerksam gemacht[47]): die Behauptung, dass man das wahre

---

tion von *Bessel*'s Verfahren giebt *M. Guist,* Progr. Hermannstadt 1864, p. XXXVII. Spezielle Formeln für $n = 8$ und $n = 12$ bei *A. Bravais* in einer Note zur franz. Übers. von *Kämtz'* Vorlesungen (Cours de météorologie, Paris 1843), p. 483.

44) Zeitschr. Meteorol. 20 (1885), p. 216; Dorp. Schriften 5 (1890), III 3, p. 17. *Weihrauch* empfiehlt p. 35, bei Interpolation zufällig ausgefallener Beobachtungen alle möglichen die Lücke in ihrem Innern enthaltenden Beobachtungen mit heranzuziehen, nicht bloss die mit dem konventionell festgesetzten Anfang beginnende.

45) Solche Verhältnisse liegen bei dem täglichen Gang der Temperatur vor, der wesentlich davon beeinflusst wird, ob die Sonne über oder unter dem Horizont steht. Man kann also nicht aus nur bei Tage angestellten Beobachtungen den Verlauf der Temperatur während der Nacht extrapolieren. Vgl. darüber *G. V. Schiaparelli,* Milano effem. 1867, app. Nr. 11, p. 8; *H. Wild,* Repert. Meteor. Suppl. 1 (1881) (77), p. 101; *A. Angot,* Assoc. franç. 18 (1889), p. 281. Andererseits geht *P. Schreiber,* Leop. N. A. 48 (1892), p. 206 zu weit, wenn er nur solche Interpolationen für zulässig erklärt, die linear geschehen können.

46) Man beachte, dass bei der hier benutzten Bezeichnung $\frac{1}{2}A_0$ der Mittelwert ist.

47) Dubl. Trans. 22 (1849), Nr. 3, p. 63 (Auszüge Dubl. Proc. 4 (1850), p. 80;

Mittel einer Erscheinung aus n beliebigen äquidistanten Beobachtungen erhalten könne, ist äquivalent mit der, dass sich die betr. Erscheinung durch die *Bessel*'sche Formel mit n Koeffizienten genau darstellen lasse. Doch verbietet sich die Anwendung dieses Satzes meist aus praktischen Rücksichten; man hat daher für die Berechnung des Mittelwertes aus Beobachtungen zu Terminen, die nach solchen Rücksichten gewählt sind, eine grosse Anzahl verschiedener Formeln mit mehr oder weniger einfachen Koeffizienten vorgeschlagen[48]). Zur systematischen Ableitung solcher Formeln aus der allgemeinen Interpolationsformel (20) liegt nur bei *K. Weihrauch*[49]) ein Ansatz vor.

10. Behandlung der Extrema bei trigonometrischer Interpolation. Aus der allgemeinen Formel (20) erhält man, wenn man die Argumente teilweise zusammenrücken lässt, durch Grenzübergang Formeln, die der Voraussetzung entsprechen, dass man für gewisse Argumentwerte ausser den Werten der zu bestimmenden Funktion selbst auch noch die Werte einiger ihrer niedrigsten Ableitungen kennt[50]). Von solchen Formeln würde in dem allerdings selten vor-

---

Brit. Assoc. Report. für 1848, p. 1). Ebenso *Guist* [43]), p. XIII; *P. A. Serpieri,* Meteor. ital. 1867, suppl. p. 18 (auch sep. Urbino 1866); *Ragona* (nach dem Bericht von *G. Cantoni,* ib. p. 45). *G. V. Schiaparelli* und *Celoria* bezeichnen ib. Nr. 34, p. 8 den Satz als Astronomen und Geodäten wohlbekannt und von ihnen zur Elimination der Teilungsfehler ihrer Instrumente fortwährend benutzt. *Lloyd* und *Guist* gründen auf ihn Methoden zur Interpolation ausgefallener Beobachtungen.

Umgekehrt benutzt *S. Drach,* Phil. Mag. 20 (1842), p. 477, den Satz, um aus der Übereinstimmung der auf verschiedene Art berechneten Mittelwerte auf die Möglichkeit der Darstellung der Erscheinung durch die *Bessel*'sche Formel mit bestimmter Gliederanzahl zu schliessen.

48) Zusammenstellung solcher Formeln und Vergleich ihrer Resultate mit den aus zahlreicheren Beobachtungen (manchmal allerdings aus selbst schon interpolierten!) abgeleiteten geben *L. Fr. Kämtz*, J. Chem. Phys. 47 (1826), p. 393; *H. Dove,* Berl. Abh. 1846 (48), phys. Kl., p. 102; *Ch. Dewey,* Smiths Report. 1857, p. 310; 1860, p. 413; *J. Edlund,* Stockh. meteor. Iaktt. 1 (1859), p. XII; *G. Cantoni,* Meteor. ital. 1867, suppl., p. 45; 1869, suppl., p. 86; *W. Köppen,* Repert. Meteor. 3^7 (1873); *K. Jelinek,* Wien. Denkschr. 27 (1867), Tafel V, p. 118; *H. Wild,* Repert. Meteor. Suppl. 1, 1881, Tabelle V, p. XLVII (Erläuterungen p. 151, 166); am ausführlichsten *Fr. Erk,* Münch. Abh. 14 (1883), p. 175 (Auszug Meteor. Zeitschr. 19 (1884), p. 254).

49) Dorp. Schriften 4 (1888), II 1, Nr. 4, p. 26. Bei Benutzung von *Weihrauch*'s Resultaten würde zu beachten sein, dass seine Schlüsse die genaue Darstellbarkeit der betr. Erscheinung durch die *Bessel*'sche Formel mit der betr. Gliederzahl voraussetzen; er erwähnt das hier nicht noch einmal ausdrücklich, weil er diese Voraussetzung durchgängig macht.

50) *F. G. Teixeira,* Nouv. ann. (3) 4 (1885), p. 351; *F. Diestel,* Diss. Gött. 1890.

kommenden Falle Gebrauch zu machen sein, dass man den Termin kennt, zu dem eine Erscheinung einen ihrer extremen Werte erreicht, und zugleich den Betrag dieses Extremums selbst. Kennt man nur den letzteren, aber nicht den ersteren, so scheint die allgemeine Behandlung der sich ergebenden Gleichungssysteme Schwierigkeiten zu bieten; einige spezielle Fälle sind von *K. Weihrauch* diskutiert[51]).

Für die umgekehrte Frage der Ableitung der Extrema aus der Interpolationsformel ist zu beachten: Für jede Art von Interpolationsformeln gilt, dass die Werte der Ableitung einer Funktion und insbesondere die Lagen ihrer Extrema durch die Interpolationsformel nicht mit derselben Sicherheit dargestellt werden können, als die Werte der Funktion selbst. Denn daraus, dass die Werte der Differenz zwischen wahrem und interpoliertem Funktionswert selbst sehr klein sind, kann nichts über die Grösse der Werte der Ableitung dieser Differenz geschlossen werden: die Differenz könnte ja zahlreiche kleine Oscillationen aufweisen. Speziell bei den trigonometrischen Interpolationsformeln ist das nicht nur nicht von vornherein ausgeschlossen, sondern es findet im Gegenteil in jedem Falle wirklich statt: die Funktionen des n-fachen Winkels wechseln in der Periode $2n$-mal ihr Vorzeichen. In der Rechnung kommt diese Eigenschaft der trigonometrischen Interpolationsformeln dadurch zum Ausdruck, dass ihre höheren Glieder bei der Differentiation grosse Multiplikatoren erhalten[52]). Die Verkennung dieser Verhältnisse hat namentlich in der Meteorologie vielfach zu unrichtigen Angaben über die Lage der Extrema geführt, bis *H. Wild* mit dem Unwesen aufräumte[53]).

11. Berechnung des Ganges einer periodischen Erscheinung während einer längeren Periode aus Mittelwerten für kürzere Zeiträume. Häufig sieht man sich bei der Diskussion des Ganges einer Erscheinung während einer längeren Periode (z. B. während eines Jahres) veranlasst, aus den beobachteten Werten y_ν zunächst Mittelwerte Y_ν für kürzere Zeiträume (z. B. Monate) zu bilden und aus diesen erst den Gang für den längeren Zeitraum abzuleiten. Vielfach geschieht das dadurch, dass einfach die Y durch die *Bessel*'sche Formel dargestellt werden; doch hat schon *A. Bravais*[54]) darauf aufmerksam gemacht, dass die richtige Formel vielmehr ist:

51) Dorp. Schriften 5 (1890), IV 3, p. 68. 52) *L. Grossmann* [20]), p. 3.

53) Repert. Meteor. Suppl. 1, 1881, (77), p. 96 (Auszug Meteor. Zeitschr. 13 (1878), p. 108, 129). Eine dort p. 98 zitierte Bemerkung von *Behrens* aus früherer Zeit war mir nicht zugänglich. Ähnlich *P. Schreiber*, Leop. N. A. 58 (1892), p. 206, 210; dagegen *B. A. Gould*, Amer. J. of sci. 119 (1880), p. 213.

54) Voyages [22]), p. 321, 324. Die Sache ist wiederholt in Vergessenheit

$$(31) \qquad y = \sum \frac{\mu\pi}{p \sin \frac{\mu\pi}{p}} R_\mu \sin \mu (t - t_\mu),$$

unter R_μ, t_μ die aus den Y berechneten Werte verstanden, unter p die Anzahl der in dem längeren Zeitraum enthaltenen kürzeren Zeiträume. Die Amplituden der einzelnen Komponenten werden also durch die Verwendung von (13) statt (31) um so stärker verringert, je höher ihre Ordnungszahl ist. Man kann übrigens auch die y_ν aus den Y_ν durch parabolische Interpolation ableiten; *J. D. Forbes* erhält so die Formel[55]):

$$(32) \qquad y_\nu - Y_\nu = \frac{1}{p}\left\{Y_\nu - \frac{1}{2}(Y_{\nu-1} + Y_{\nu+1})\right\}.$$

In der meteorologischen Litteratur ist diese Frage noch mit einer anderen verquickt: die bürgerlichen Monate sind ungleich lang, man darf also Beobachtungen, die zu ihren Mitten gehören, nicht als genau äquidistant ansehen[56]). Eine strenge Behandlung dieser Frage geben *G. Stokes*[57]) und *A. Angot*[58]); übrigens lässt sie sich auch durch parabolische Interpolation behandeln[59]), oder dadurch, dass man die Kurve während dreier aufeinander folgender Monate durch eine einfache Sinuslinie ersetzt[60]). Endlich kann man auch statt der gesuchten Funktion zuerst ihr unbestimmtes Integral entwickeln, dessen Werte für die

---

geraten und immer wieder von neuem entdeckt worden: *J. Lamont,* Münch. Sternw. Ann. Suppl. 3, 1859, § 19, p. XLII; *J. D. Everett,* Edinb. N. Philos. J. 14 (1861), p. 30, 33; Amer. J. of sci. (2) 35 (1863), p. 29; 36 (1863), p. 176; *G. V. Schiaparelli,* Milano effem. 1867, app. Nr. 39, p. 30; *A. Krüger,* Astr. Nachr. 82 (1873), col. 333; *W. Ferrel,* U. S. survey report 1874, app., Nr. 161, p. 158; *T. R. Robinson,* Lond. Trans. 165 (1875), p. 421; *K. Weihrauch,* Meteor. Zeitschr. 18 (1883), p. 24; *V. N. Nene,* Lond. Roy. Proc. 36 (1884), Nr. 27, p. 381; *R. Sresnewskij,* Repert. Meteor. 12 (1889), kleinere Mitt. p. 1; *L. Grossmann* [20]), B p. 11; *A. Schuster,* Lond. Roy. Proc. 61 (1897), p. 459.

55) Edinb. Trans. 22 (1861), Nr. 55, p. 346. Dieselbe Formel geben *E. Plantamour,* du climat de Genève, Genève 1863, § 3, p. 39 und *J. Kleiber,* Repert. Meteor. 13 (1890), kleinere Mitt. p. 2 in der Bezeichnungsweise der Differenzenrechnung.

56) Über die aus einer solchen Annahme entspringenden Fehler vgl. *K. Weihrauch,* Dorp. Ber. 8 (1889), p. 18 (vom Nov. 1885).

57) Bei *T. R. Robinson,* Lond. Trans. 165 (1875), p. 425. *Robinson* findet das Verfahren zu mühsam und begnügt sich daher mit einem angenäherten.

58) Par. Ann. météor. 1887 (1889), p. 228.

59) *Plantamour* [55]); *E. L. De Forest,* Amer. J. of sci. 91 (1866), p. 371; *Weihrauch* [51]); *Angot* [58]), p. 232. *Plantamour* stützt auf seine Formeln ein Verfahren successiver Approximation.

60) *E. L. De Forest,* Amer. J. of sci. 92 (1866), p. 154; *K. Weihrauch* [51]), p 34 („goniometrische Interpolation").

Monatsenden sich sofort aus den unkorrigierten Monatsmitteln ergeben; aus seinem allgemeinen Ausdruck sind dann seine Werte für äquidistante Argumente zu entnehmen; deren Differenzen können als äquidistante Mittelwerte angesehen werden[61]).

12. Verwendung der trigonometrischen Interpolation zu mechanischer Quadratur. Berechnung der Koeffizienten trigonometrischer Entwickelungen aus möglichst wenig Beobachtungen. Aus den Entwickelungen von Nr. 4 geht hervor, dass die Formel mechanischer Quadratur

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{2\pi}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} f\left(\frac{2\nu\pi}{n}\right) \tag{33}$$

genau richtig ist, wenn in der Entwickelung der Funktion $f(t)$ nach den Cosinus und Sinus der Vielfachen von t keine Glieder mit einem niedrigeren Vielfachen von t als dem $n/2^{\text{ten}}$ vorkommen, und dass im anderen Fall der Fehler der Formel (33) durch die erste Gleichung (19) gegeben wird[62]). Doch ist damit nichts gewonnen, was über die elementaren Quadraturformeln hinausginge. Ein zu den *Gauss*'schen mechanischen Quadraturformeln (II A 2, Nr. 52, *Voss*; II A 11, *Burkhardt*) analoges Resultat hat für die trigonometrischen Entwickelungen zuerst *Br. Bronwin*[62a]), dann aus einem etwas allgemeineren Ansatz durch Spezialisierung *F. G. Mehler*[63]) abgeleitet; die Gleichung:

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi} f(\cos t)\,dt = \frac{\pi}{n}\sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{(2\nu+1)\pi}{2n}\right) \tag{34}$$

ist genau richtig, wenn $f(x)$ eine ganze rationale Funktion von nicht höherem als dem $(2n-1)^{\text{ten}}$ Grade bedeutet. Eine einfache Ableitung dieses Resultats mit Hülfe der Identität:

$$\frac{\cos n\,(\arccos x)}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{n+1}\frac{d\cos n\,(\arccos x)}{dx} + (x^{-1}) \tag{35}$$

giebt *F. Tisserand*[64]). Zu derselben Formel gelangt auch *P. L. Tsche-*

61) *K. Weihrauch*, Dorp. Schriften 5 (1890), III, p. 45 (mit Tabellen der Logarithmen der auftretenden Zahlenkoeffizienten). Ein abgekürztes Verfahren zur Bestimmung der ersten Koeffizienten bei *L. Grossmann*[20]), B 3, p. 16.

62) *E. Heine*, Handbuch der Kugelfunktionen, 2. Aufl., 2, Berlin 1881, § 13, p. 24. 62a) Phil. mag. 34 (1849), p. 262.

63) J. f. Math. 63 (1864), Nr. 4, p. 156. *H. Bruns* (Grundlinien, § 81, p. 113) bemerkt, dass man bei Benutzung von (34) für eine gerade Funktion und das Intervall $(0 \ldots 2\pi)$ doch nur eine Ordinate weniger zu berechnen braucht, als bei Benutzung von (33) mit doppelt so grossem Wert von n.

64) Par. C. R. 68 (1869), p. 1101. *Tisserand*'s Angabe, die Formel (34) rühre

byscheff[65]), ebenfalls durch Spezialisierung eines allgemeinen Ansatzes, indem er die Frage beantwortet: wie müssen die Argumente α_ν gewählt werden, damit jedes Integral der Form (34) möglichst genau durch

$$A \sum_{\nu=1}^{n} f(\alpha_\nu) \tag{36}$$

dargestellt werde. Ausserdem zeigt er auch[66]), wie diese Argumente gewählt werden müssen, damit die Gleichung

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} x\,dx = A\left\{\sum_{\nu=1}^{m} f(\alpha_\nu) - \sum_{\nu=m+1}^{2m} f(\alpha_\nu)\right\} \tag{37}$$

möglichst genau richtig wird. Damit ist eine Formel zur Berechnung des Koeffizienten A_1 in der trigonometrischen Entwickelung von $f(\cos t)$ gewonnen; eine Andeutung *Tschebyscheff*'s[67]), wie man von hier aus auch zu Formeln für die Koeffizienten der übrigen Cosinusglieder gelangen könne, ist später von *R. Radau*[68]) näher ausgeführt worden. *C. Posse*[69]) gewinnt nach der Methode von *Tschebyscheff* noch die beiden Näherungsformeln:

$$(38)_2' \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, f(x)\,dx = \frac{\pi}{n} \sum_{\nu=1}^{n-1} \sin^2 \frac{\nu\pi}{n} f\cos\left(\frac{\nu\pi}{n}\right), \\ \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, f(x)\,dx = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{\nu=1}^{n} \cos^2 \frac{\nu\pi}{2n+1} f\left(\cos \frac{2\nu\pi}{2n+1}\right). \end{cases}$$

Die Verwendung der allgemeinen Gleichungen (20) bis (23) zur Integration bespricht *B. Baillaud*[70]). Er leitet zunächst die Relation ab:

---

von *Jacobi* her, beruht wohl nur auf einem Missverständnis eines auf (35) sich beziehenden Citates bei *Mehler*. Ausführlichere Darstellung von *Tisserand*'s Schlüssen bei *Ch. Hermite*, Cours d'analyse de l'éc. polyt., Paris 1873, p. 452.

65) Assoc. franç. 2 (1873), p. 60; J. de math. (2) 19 (1874), p. 19.

66) Nr. 8, p. 29. 67) Nr. 10, p. 34.

68) Par. C. R. 90 (1880), p. 520; J. de math. (3) 6 (1880), Nr. 19, p. 319. *Radau* giebt Nr. 15, p. 316 auch einen einfachen Beweis der Formel (34), indem er für $f(\cos t)$ speziell $\cos ht$, $(h = 1, 2, \ldots, 2n-1)$ setzt.

69) Nouv. ann. (2) 14 (1875), Nr. 3, p. 55; reproduziert sur quelques applications des fractions continues, Petersburg 1886, 4[3], p. 71. — Eine ähnliche Formel für eine sehr grosse Zahl von Zwischenwerten leitet *G. Bauer*, Hab.-Schr. München 1857, p. 47, durch Grenzübergang aus der *Gauss*'schen Quadraturformel ab.

70) Toulouse observ. ann. 2 (1886), B, Nr. 8, p. 9.

$$(39) \qquad \int_0^{2\pi} \prod_{\nu=1}^{2n} \sin \frac{t-\alpha_\nu}{2}\, dt = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \sum_{(s_p)} \cos\left(\frac{s}{2} - s_p\right),$$

in der s die Summe aller α_ν, s_p die Summe von irgend p unter ihnen bezeichnet und die Summation über alle möglichen Kombinationen der α_ν zu erstrecken ist. Die Anwendung auf das Quadraturproblem giebt zunächst nur die elementarste Quadraturformel. Wird verlangt, die Zwischenwerte bei vorgeschriebener Anzahl derselben so zu wählen, dass der Fehler möglichst klein wird, so ergiebt sich, dass sie jedenfalls äquidistant gewählt werden müssen. Dann fallen nämlich die n ersten Vielfachen weg, wenn man die Differenz zwischen dem wahren und dem angenäherten Funktionswert, geteilt durch das in (39) auftretende Produkt, nach den ungeraden Vielfachen von $t/2$ entwickelt. Geht man von (23) aus, so kommt man auf die *Gauss*sche Quadraturformel[71]); geht man von (22) aus, auf das Resultat von *Mehler*[63]). *Baillaud* findet übrigens, dass bei der gebräuchlichen Wahl $\alpha_\nu = \nu\pi/n$ das erste Korrektionsglied abgesehen vom Vorzeichen merklich denselben Wert hat, wie bei *Mehler*'s Formel[72]).

Begnügt man sich mit einem um zwei Einheiten geringeren „Genauigkeitsgrad", so erhält man, wie *R. Radau*[73]) zeigt, die Formeln:

$$(40) \qquad \int_0^{\pi} f(\cos t)\, dt = \frac{\pi}{n}\left\{\frac{1}{2} f(1) + \sum_{\nu=1}^{n-1} f\left(\cos\frac{\nu\pi}{n}\right) + \frac{1}{2} f(-1)\right\}$$

und:

$$(41) \qquad \int_0^{\pi} f(\cos t)\cos t\, dt$$

$$= \frac{\pi}{2n+1} \sum_{\nu=0}^{n-1} \cos\frac{(2\nu+1)\pi}{2n+1}\left\{f\left(\cos\frac{(2\nu+1)\pi}{2n+1}\right) - f\left(\cos\frac{(2n+2\nu+2)\pi}{2n+1}\right)\right\}.$$

Entsprechende Formeln, die nur die eine Endordinate enthalten, finden sich bei *A. Markoff*[74]).

A. Dawidoff[75]) gelangt noch durch einen anderen Ansatz zu Formel (38): Ist $f(x)$ eine rationale ganze Funktion vom Grade $2n$ und wird

$$(42) \qquad f(x) = f_1(x)\cos(n \arccos x) + \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu x^\nu$$

---

71) Nr. 27, p. 34. 72) Nr. 28, p. 35.

73) J. de math. (3) 6 (1880), Nr. 16, p. 317; Nr. 17, p. 318.

74) Differenzenrechnung (Petersb. 1891), deutsch von *Friesendorff* und *Prümm*, § 22, p. 94, Leipzig 1896.

75) J. de math. (3) 8 (1882), Nr. 11, p. 407.

gesetzt, so ergiebt sich zunächst:

$$(43)\qquad \int_{-1}^{1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{0}^{\pi} f_1(\cos t)\cos nt\,dt + \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu \int \cos^\nu t \cos nt\,dt,$$

und da in der Summe rechts alle einzelnen Integrale null sind, so ist damit ebenfalls die Integration eines $(2n+1)$-gliedrigen Ausdrucks auf die eines $(n+1)$-gliedrigen zurückgeführt.

13. Trigonometrische Interpolation von Funktionen zweier Argumente geschieht durch wiederholte Anwendung der für Funktionen eines Argumentes geltenden Formeln („doppelte mechanische Quadratur" bei den Astronomen). Sie ist schon von *Bessel*[76]) gestreift, dann von *Hansen* empfohlen[77]) und in ausgedehntem Umfang angewendet worden[78]). Auch *Cauchy*[79]) und *Leverrier*[80]) haben sich mit ihr beschäftigt; *Jacobi* verhält sich ablehnend gegen sie[81]).

Sollen nur einzelne Terme oder Gruppen von Termen in einer solchen Entwicklung bestimmt werden, etwa die zu einem bestimmten Argument $j\xi - j_1\xi_1$ (j, j_1 relativ prim) und seinen Vielfachen gehörenden, so kann man mit *Liouville*[81a]) neue Variable:

$$j\xi - j_1\xi_1 = \theta,\quad \xi = j_1\sigma$$

einführen und damit die zu entwickelnde Funktion auf die Form bringen:

$$F(\xi, \xi_1) = A_0 + \sum A_\mu e^{\mu\theta i} + \varphi,$$

in der φ die Gesamtheit der von σ nicht freien Glieder bezeichnet. Wird F zunächst nach Vielfachen von σ entwickelt:

$$F = \sum C_s(\theta) e^{s\sigma i},$$

so ergiebt sich:

$$A_0 + \sum A_\mu e^{\mu\theta i} = C_0(\theta).$$

---

76) Berl. Abh. 1820/21, p. 55; Astr. Nachr. 6 (1828), col. 346 (Ges. Abh. 2, p. 362, 371).

77) Astr. Nachr. 7 (1829), Nr. 25, col. 473.

78) Über die gegenseitigen Störungen des Jupiters und Saturns, Preisschr. Berl. 1831, Nr. 13, p. 49. *Hansen* bemerkt, dass es sich unter Umständen empfiehlt, nicht direkt nach den Vielfachen der beiden gegebenen Argumente, sondern nach denjenigen geeigneter linearer Verbindungen von ihnen zu entwickeln.

79) Turiner Mém. [24]), § 3, Gl. (61) ff., p. 122; Par. C. R. 20 (1845), p. 825 (Oeuvres (1) 9, p. 141.)

80) Par. Observ. ann. 1 (1855), Nr. 23, p. 117; Nr. 38, p. 147.

81) Nachlass (von 1843?); Werke 7, p. 288.

81a) J. de math. 1 (1836), Nr. 5, p. 201.

Man kann auch noch weitere Glieder nach diesem Verfahren berechnen[81b]); ist:

$$\lambda = m\theta + n\xi + n_1\xi_1$$

irgend ein weiteres Argument und wird

$$\varphi = \sum B_\mu e^{(\lambda+\mu\theta)i} + \chi$$

gesetzt, wo jetzt χ die Gesamtheit derjenigen Glieder bezeichnet, deren Argumente sich weder auf die Form $\mu\theta$, noch auf die Form $\lambda + \mu\theta$ bringen lassen, so erhält man

$$\sum B_\mu e^{(\lambda+\mu\theta)i} = e^{-(mj_1+n)\frac{\theta}{j_1}i} C_{n_1 j - n j_1}(\theta).$$

Für jeden bestimmten Wert von θ können die C nach einer der besprochenen Methoden berechnet werden; variiert man θ, so kann man die erforderliche Anzahl von Gleichungen zur Bestimmung der A und der B erhalten. Bedient man sich dabei der Methode von *Leverrier* (Nr. 7), so kann man es so einrichten[81c]), dass man für alle verschiedenen θ immer dieselben Werte der ursprünglichen Variabeln, nur in anderer Reihenfolge, zu benutzen hat.

II. Separation mehrerer bekannter Perioden.

14. Vorbemerkungen, insbesondere über theoretische und praktische Kommensurabilität. Für die Auffassung einer grossen Klasse von Erscheinungen ist ein Satz fundamental, den zuerst *P. S. de Laplace* bei seinen Untersuchungen über Ebbe und Flut[82]) ausgesprochen zu haben scheint: Die durch eine periodisch wirkende Kraft erzwungenen Schwingungen eines Systems haben dieselbe Periode wie die Kraft selbst; nur ihre Amplitude und ihre Phase hängen von Nebeneinflüssen (Dämpfung) ab. Andererseits besagt ein Superpositionsprinzip, das, soviel ich sehe, zuerst von *J. M. C. Duhamel*[83]) allgemein formuliert worden ist: Die Wirkungen zweier verschiedener Kräfte, die von den Koordinaten unabhängig sind, addieren sich einfach, wenigstens solange nur kleine Schwingungen in Betracht kommen. Auf Grund dieser beiden Prinzipien lassen sich eine grosse Klasse

---

81b) *H. Durrande,* Thèse Paris 1864, Nr. 4, p. 56; vgl. auch die Darstellung bei *J. Hoüel,* Prag Archiv 1 (1875), § 3, p. 30 des S.-A.

81c) *Durrande,* Nr. 8, p. 63.

82) Par. Hist. 1775 (77), p. 89; 1776 (78), p. 177, 525 (Oeuvres 9, p. 88, 185, 281); bestimmter Mécanique céleste 2, Paris 1800, livre IV, Nr. 16 (Oeuvres 2, p. 230).

83) J. éc. polyt. cah. 23, 1834 (vom Apr. 1832), p. 4.

von Erscheinungen durch Superposition von periodischen Termen verschiedener Perioden darstellen.

Hat man nur mit zwei Komponenten von den Perioden a, b zu thun, so sind theoretisch zwei Fälle zu unterscheiden: Sind a und b zu einander kommensurabel, d. h. ist ihr Verhältnis gleich dem von zwei ganzen Zahlen m, n, so haben sie auch ein gemeinsames Vielfaches

$$\omega = na = mb;$$

eine Erscheinung, die sich aus zwei solchen Komponenten superponiert, kann dann einfach als Erscheinung von der Periode ω angesehen und nach den bisher besprochenen Methoden behandelt werden. Sind aber a, b zu einander inkommensurabel, so giebt es kein solches ω, die zusammengesetzte Erscheinung ist dann gar nicht periodisch im strengen Sinne des Wortes.

Praktisch stellt sich diese Unterscheidung etwas anders. Lässt sich das Verhältnis von a zu b nur durch zwei *grosse* ganze Zahlen ausdrücken, so wird ω ein sehr langer Zeitraum; infolge dessen werden meistens gar nicht Beobachtungen über eine volle Periode ω zur Verfügung stehen. Man wird dann praktisch auf die noch zu besprechenden Methoden angewiesen sein. In solchen Fällen könnte man von praktischer Inkommensurabilität der beiden Perioden a und b sprechen[84]).

Für eine grössere Anzahl von zu superponierenden Perioden gilt natürlich entsprechendes.

15. Elimination von säkularen Störungen. Der einfachste hier in Betracht kommende Fall ist der, dass a und b so sehr von einander verschieden sind, dass man den Einfluss der längeren Periode während der Dauer der kürzeren als *säkular* behandeln, d. h. durch eine lineare Funktion der Zeit darstellen kann. Das trifft z. B. zu, wenn die Darstellung des täglichen Ganges eines meteorologischen Elements von dem Einfluss des jährlichen Ganges befreit werden soll. Ist y_ν der um ν Uhr beobachtete Wert, so wird y_{24} nicht mit y_0 übereinstimmen. Das Nächstliegende würde nun sein, dass man die Zunahme $y_{24} - y_0$ gleichmässig auf die 24 Tagesstunden verteilte, also y_ν durch

$$y_\nu - \frac{\nu}{24}(y_{24} - y_0) \tag{45}$$

ersetzte. Das geschieht auch vielfach[85]). Doch hat schon *A. Bravais*[86])

84) In der geophysikalischen und kosmophysikalischen Litteratur findet sich diese Unterscheidung zwischen theoretischer und praktischer Inkommensurabilität nicht; vgl. aber etwa *F. Klein*, Anwendung der Diff.- u. Int.-R., Leipzig 1902, p. 22.

85) Z. B. bei *G. V. Schiaparelli*, Mil. effem. 1868, app. (mir nur durch *M. Rajna*,

darauf aufmerksam gemacht, dass bei diesem Verfahren auch das Tagesmittel geändert wird; berechnet man dieses, wie *Bravais* es thut, nach der Formel:

$$\frac{1}{24}\left\{\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{23} + \frac{1}{2}y_{24}\right\}, \tag{46}$$

so ist y_ν durch

$$y_\nu + \frac{12-\nu}{24}(y_{24} - y_0) \tag{47}$$

zu ersetzen, wenn der jährliche Gang aus dem täglichen eliminiert werden und dabei zugleich das Tagesmittel ungeändert bleiben soll. Das von *J. Lamont* vorgeschlagene und vielfach nach ihm benannte Verfahren[87]) unterscheidet sich von dem *Bravais*'schen nur dadurch, dass *Lamont* das Tagesmittel nach der Formel

$$\frac{1}{24}(y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{23} + y_{24}) \tag{48}$$

berechnet; infolge dessen tritt bei ihm nicht $(12-\nu)\ (y_{24} - y_0)$, sondern $(12{,}5 - \nu)\ (y_{25} - y_1)$ als Faktor in der Formel (47) auf. Würde man das Tagesmittel, wie in der harmonischen Analyse der Gezeiten zuweilen geschieht, nach der Formel:

$$\frac{1}{25}(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{23} + y_{24}) \tag{49}$$

berechnen, so würde $12 - \nu$ im Zähler und 25 im Nenner als Faktor auftreten. Genauer als das *Bravais-Lamont*'sche Verfahren, das zur Bestimmung des Einflusses des jährlichen Ganges nur die erste und letzte der täglichen Beobachtungen benutzt, würde die Berechnung einer den Beobachtungen sich möglichst anschliessenden linearen Funktion unter Benutzung sämtlicher Beobachtungen sein[88]).

R. Strachey[89]) giebt auch entsprechende Korrektionen für die

---

Mil. osserv. pubbl. 26 (1884), p. 15 bekannt). *Schiaparelli* und *G. Celoria* berichten Meteor. Ital. 1 (1867), suppl. Nr. 8, p. 2 des S.-A., dass sich solche Korrektionen in nachgelassenen Rechnungen von *Fr. Carlini* finden.

86) Voyages [22]), p. 325 („préparation préliminaire des moyennes horaires").

87) Münch. Sternw. Ann. Suppl. 6 (1868), § 4, p. VII. 11,5 bei *Lamont* statt 12,5 ist ein Versehen; es würde richtig sein, wenn man nach

$$\frac{1}{24}(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{22} + y_{23}) \tag{48a}$$

rechnen wollte. In der meteorologischen Litteratur wird übrigens häufig *Lamont* citiert, dabei aber nach *Bravais* gerechnet.

88) *R. Wolf,* Astr. Mitt. 2 (1856), p. 17 benutzt für das analoge Problem der Elimination des elfjährigen Ganges der Sonnenflecken aus dem jährlichen die Methode der kleinsten Quadrate. In den zahlreichen Fällen, in welchen die Beschaffenheit des Beobachtungsmaterials die Anwendung dieser Methode weder gestattet noch fordert, würde vielleicht die Benutzung der *Cauchy*'schen Interpolationsmethode (vgl. I D 3, Nr. **11**, *Bauschinger,* sowie II A 11, *Burkhardt*) zu empfehlen sein.

89) Lond. Roy. Proc. 42 (1887), Nr. 7, p. 67; Hourly readings from the self-

Berechnung der übrigen Koeffizienten der den täglichen Gang darstellenden *Bessel*'schen Formel.

Ein Verfahren, das zur Elimination nicht nur säkularer, sondern auch beliebiger anderer Störungen aus einer bekannten Periode dienen soll, giebt *N. Ekholm*[90]: Wären keine Störungen vorhanden, so wären bei der graphischen Darstellung von $y = f(t)$ die Verbindungslinien von Punkten derselben Phase in aufeinander folgenden Perioden alle zur Abscissenaxe parallel; infolge der Störungen ist das nicht der Fall. *Ekholm* dreht daher alle diese Verbindungslinien der Reihe nach um ihre Mittelpunkte, bis sie zur Axe parallel werden; dabei lässt er jedesmal die zwischenliegenden Ordinaten der Bewegung folgen, sodass sie ihrem Abstand vom Drehpunkt proportional verlängert oder verkürzt werden. Die rechnerische Durchführung dieser Idee wäre sehr mühsam. *Ekholm* benutzt daher ein abgekürztes Verfahren, bei dem einfach jeder Ordinate diejenige Zahl als Gewicht beigelegt wird[91], die angiebt, wie oft sie bei dem ersten abgeändert werden müsste. Später[92] modifiziert er dieses Verfahren noch etwas, indem er die Beobachtungen auf verschiedene Art zu Gruppen zusammenfasst.

16. Separation zweier Perioden von gleicher Grössenordnung. Setzt sich der Ausdruck einer Funktion:

$$(50) \quad f(t) = A_1 \cos n_1 t + B_1 \sin n_1 t + A_2 \cos n_2 t + B_2 \sin n_2 t$$

aus zwei einfach periodischen Gliedern zusammen, deren Perioden von der gleichen Grössenordnung sind, so kann man eine von einem Ausschuss der British Association for the advancement of sciences zur harmonischen Analyse der Gezeiten[93] entwickelte Methode verwenden. Man kann nämlich den Ausdruck (50) auch ersetzen durch[94]:

---

recording instruments of the four stations under the meteor. council 1884, London 1887, appendix.

90) Meteor. Zeitschr. 20 (1885), p. 81. 91) p. 83.

92) ib. 23 (1888), Nr. 2, p. 54; Anwendungen dieser Methode zusammen mit *Sv. Arrhenius*, Stockh. Handl. Bihang 19^8 (1894), p. 19.

93) Von den verschiedenen Berichten dieses Ausschusses giebt der erste, von *W. Thomson* redigierte (Brit. Ass. report for 1868, p. 489) nur eine knappe Darstellung der angewandten Rechnungsmethoden; in einem folgenden, von *E. Roberts* redigierten, wird sie mit einigen Abänderungen wiederholt, die sich inzwischen als zweckmässig herausgestellt hatten (ib. for 1872, p. 355). Ausführlicher, aber immer noch knapp ist ein von *G. H. Darwin* redigierter Bericht eines späteren Ausschusses (ib. for 1883, p. 49; Berichtigungen ib. for 1884, p. 35); man wird daher die Erläuterungen von *C. Börgen* (Ann. der Hydrogr. 12, 1884; auch sep. Berlin 1885), von *Ph. Hatt* (ann. hydrogr. 1893; auch sep. Paris 1893), von *R. Harris*, U. S. coast survey report f. 1897, app. 9, Kap. V, p. 537 oder von *M. Lévy*, Théorie des marées 1, Paris 1898, chap. 4, p. 68 mit Vorteil zuziehen.

$$(51) \quad \{A_1 + A_2 \cos(n_1 - n_2)t - B_2 \sin(n_1 - n_2)t\} \cos n_1 t + \{B_1 + A_2 \sin(n_1 - n_2)t + B_2 \cos(n_1 - n_2)t\} \sin n_1 t,$$

m. a. W. man kann ihn ansehen als äquivalent einer einfachen Schwingung von der Schwingungszahl n_1 mit langsam veränderlicher Amplitude und Phase. Man braucht also, um A_1 und B_1 zu finden, nur von einer grossen Anzahl Perioden $2\pi/n_1$ die Amplituden und Phasen zu berechnen und Mittelwerte zu nehmen; man erhält so genaue Resultate, wenn der Beobachtungszeitraum ein ganzes Vielfaches von $2\pi/(n_1 - n_2)$ ist, wenigstens annähernd richtige, wenn er nur überhaupt gross ist[95]).

Um dieses Verfahren zur Ermittelung einer bestimmten Komponente anzuwenden, verfährt man am bequemsten so, dass man die Beobachtungen zunächst nach der Periode dieser Komponente ordnet; d. h. man nimmt alle diejenigen Beobachtungen zusammen, deren Termine von einer bestimmten Phase $v\pi/n$ der zu untersuchenden Periode um weniger als $\pi/2n$ nach der einen oder anderen Seite hin abstehen[96]).

Während bei der Gezeitenanalyse von jeder Periode hauptsächlich nur der „Grundton“ und der erste „Oberton“ in Betracht kommen, die übrigen Obertöne nur eine untergeordnete Rolle spielen, fasst eine Untersuchung von *Ch.* und *F. Chambers* auch die Bestimmung der letzteren ins Auge, für den Fall von nur zwei von einander unabhängigen Perioden. Sind die Perioden kommensurabel, so kann man

---

Darwin's neuer Bericht für 1896, sein Artikel im Manual of scientific inquiry der britischen Admiralität und *A. W. Baird*'s Manual for tidal observations, Lond. 1886, waren mir nicht zugänglich.

94) *Darwin,* p. 96; vgl. *Börgen,* § 8, p. 563, sowie die entsprechenden Bemerkungen von *Ad. Schmidt,* Wien. Ber. 96^2 (1887), p. 997. Genauere Vorschriften zur zweckmässigen Wahl des Beobachtungszeitraums bei *Darwin* im Bericht for 1885, Nr. 3 p. 37; 1886, p. 41, sowie bei *Ferrel,* U. S. coast survey report for 1878, app. 11, Nr. 15, p. 14 (reproduciert von *Harris,* ib. for 1897, Nr. 59, p. 545) und bei *Lévy* [93]), Nr. 45, p. 75.

95) Korrektionen für den letzteren Fall bei *Hatt,* § 30, p. 59.

96) Diese Anordnung wird durch die Benutzung von Schematen erleichtert, in denen man bestimmte Felder entweder überspringen oder doppelt besetzen muss, wenn die zu untersuchende Periode annähernd, aber nicht genau ein Vielfaches des Intervalls zwischen zwei aufeinander folgenden Beobachtungsterminen ist (*Darwin* § 9, p. 92; *Börgen* § 8, p. 508; *Hatt* § 29, p. 56 des S.-A.). *Darwin* trägt, wenn ein Feld doppelt zu besetzen wäre, nur die eine Beobachtung ein und überspringt die andere ganz; *Börgen* und *Hatt* ziehen die Doppelbesetzung vor. Der Umstand, dass durch dieses Verfahren nicht Terminbeobachtungen, sondern Mittelwerte benutzt werden, ist in der in Gl. (31) angegebenen Weise zu berücksichtigen.

natürlich gewisse Partialschwingungen sowohl als Obertöne der einen wie der anderen auffassen[97]).

Die periodischen Schwankungen der Polarlichter weisen eine Periode gleich dem synodischen Mondmonat auf, die aber wohl nur durch die verschiedenen Beleuchtungsverhältnisse bedingt ist. Man hat bald angenommen, dass dieser Einfluss sich einfach zu den übrigen Einflüssen superponiert[98]), bald dass er sich mit ihnen multiplikativ zusammensetzt[99]); die eine Annahme ist so wenig wie die andere mathematisch oder physikalisch begründet.

Ein von *N. Ekholm* und *Sv. Arrhenius*[100]) angegebenes Verfahren zur Trennung zweier sehr nahe gleicher Perioden S (z. B. synodischer Mondmonat) und T (tropischer Mondmonat) beruht auf der Einführung einer dritten Periode, die mit den beiden ersten durch die Relation:

$$T^{-1} - S^{-1} = S^{-1} - U^{-1} \tag{52}$$

verbunden ist. S übt auf die Berechnung der Schwankung nach der Periode U denselben Einfluss aus, wie auf die nach der Periode U; enthält die zu untersuchende Erscheinung keine wirkliche Komponente mit der Periode U, so erhält man durch die Rechnung diesen Einfluss, der dann auf T reduziert werden kann.

17. Verfahren in komplizierteren Fällen. Die harmonische Analyse der Gezeiten. Auch wenn mehr als zwei Komponenten neben einander vorkommen, kann man sich des eben geschilderten Verfahrens bedienen; das geschieht z. B. in der harmonischen Analyse der Gezeiten für alle diejenigen Komponenten, deren Periode nahezu gleich einem Sonnentag oder einem Bruchteil desselben ist[101]). Ausserdem treten dort noch eine Anzahl von Komponenten auf, deren Perioden von der Grössenordnung eines ganzen oder halben Monats sind. Diese werden zusammen berechnet; und zwar braucht man dazu nicht alle einzelnen Beobachtungen zu benutzen, sondern es genügt die Berücksichtigung der Tagesmittel. Dazu müssen aber diese letzteren erst vom Einfluss der zuerst genannten Komponenten befreit werden;

97) Lond. Trans. 165 (1875), p. 361; Auszug Lond. Roy. Proc. 21 (1873), p. 384.

98) *J. Liznar*, Wien. Ber. 97^{2a} (1888), p. 1104.

99) *N. Ekholm* und *Sv. Arrhenius*, Stockh. Handl. 31^2 (1898), p. 7.

100) ib. p. 8.

101) Von einer grossen Anzahl von Umständen, die bei der Gezeitenberechnung zu berücksichtigen sind, ist im Text keine Notiz genommen, weil sie dem Gegenstand dieses Artikels fremd sind; namentlich ist von der bekannten Abhängigkeit der Amplituden und Phasen von langsam veränderlichen astronomischen Argumenten abstrahiert.

das geschieht, indem für jede solche Komponente $R\cos(nt - \xi)$ von dem berechneten Mittelwert eine Korrektion („clearance of the daily mean") abgezogen wird, die einen der vier Werte

$$\frac{R}{24}\frac{\sin 12n}{\sin\frac{1}{2}n}\cos\left(\xi + \frac{23}{2}n\right), \tag{53}$$

$$\frac{R}{24}\frac{\sin 12n}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}n}\cos(\xi + 12n), \tag{54}$$

$$\frac{R}{25}\frac{\sin\frac{25}{2}n}{\sin\frac{1}{2}n}\cos(\xi + 12n), \tag{55}$$

$$R\frac{\sin 12n}{12n}\cos(\xi + 12n) \tag{56}$$

hat, je nachdem das Tagesmittel nach (48a), nach (46), nach (49) berechnet oder aus Aufzeichnungen von Registrierapparaten mit Hülfe des Planimeters gewonnen ist[102]). Ebenso wird die aus sämtlichen Beobachtungen abgeleitete Höhe des Mittelwassers subtrahiert; der übrig bleibende Rest wird der Summe der Wirkungen sämtlicher langperiodischer Komponenten gleichgesetzt und die so entstehenden Gleichungen werden nach den allgemeinen Vorschriften der Methode der kleinsten Quadrate (I D 2, Nr. **11**, *Bauschinger*) aufgelöst; das geschieht hier bequem durch successive Approximationen, indem in den Normalgleichungen die Koeffizienten der Diagonalglieder alle übrigen stark überwiegen[103]).

18. Bestimmung der Komponenten aus Beobachtungen der Extrema allein. Der Fall, dass nicht fortlaufende stündliche Be-

102) *Roberts* 1872, Nr. 26, p. 371; *Darwin* § 10, p. 102; *Börgen* § 9, p. 564; *Hatt* § 32, p. 63. *Darwin* zieht (48a) als für die Praxis bequemste Formel vor, ebenso *Börgen*, der aber auch den Gebrauch des Planimeters empfiehlt; *Hatt* findet (46) rationeller. Dass der durch (48a) gewonnene Mittelwert sich auf 11^h30^m bezieht, bemerkt schon *Roberts*.

103) Die nach dieser Methode zu bildenden Normalgleichungen sind für einen bestimmten Beobachtungsort schon in einem Supplement von *E. Roberts* zu *Thomson*'s erstem Bericht (1868, Nr. 28, p. 505), allgemein in *Roberts* Bericht für 1872, Nr. 26, p. 371 angegeben, ihre Ableitung scheint aber zunächst als Geheimnis behandelt worden zu sein und wird erst von *Darwin* (1883, § 10, p. 102) mitgeteilt. *J. C. Adams* (bei *Darwin* 1883, § 11, p. 110) empfiehlt die Benutzung stark abgerundeter Multiplikatoren bei der Bildung der Normalgleichungen; das Extrem dieses Gedankens würde die Benutzung der *Cauchy*'schen Interpolationsmethode [88]) sein. Die „clearance" kann auch erst an den zur Bildung der Normalgleichung dienenden Summen angebracht werden (*Darwin* p. 107; *Börgen* p. 618; *Hatt* § 34, p. 68). Einige Andeutungen über einen Fall, in welchem es nicht ohne weiteres möglich war, die Normalgleichungen durch successive Approximationen aufzulösen, im Bericht für 1870, Nr. 48, p. 122. Vgl. übrigens auch *Lévy* [93]), Nr. 52, p. 86.

obachtungen vorliegen, sondern nur solche der Extrema (Hoch- und Niedrigwasser) nach Eintrittszeit und Höhe, ist namentlich von amerikanischen Schriftstellern behandelt worden, da man dort noch an diesem System der Gezeitenbeobachtungen festhielt, als man in England bereits zu stündlichen Beobachtungen und der darauf sich stützenden harmonischen Analyse übergegangen war. *W. Ferrel*[104]) entwickelt zu diesem Zweck das Potential der gezeitenerzeugenden Kräfte nur soweit, dass in den Amplituden und Phasenkonstanten der einzelnen Terme noch Funktionen der Zeit mit einer Periode von einem halben oder einem ganzen Monat stehen bleiben (während die Engländer soweit entwickeln, dass die Ungleichheiten der Amplituden und Phasen nur noch Perioden von einem oder mehreren Jahren haben). Dann berechnet er aus den vier Beobachtungen jedes Tages die Höhe des Mittelwassers und die Amplituden und Phasenkonstanten der ganz- und der halbtägigen Komponente für diesen Tag[105]); die so erhaltenen Werte entwickelt er als Funktionen der längerperiodischen Argumente durch Gruppenbildung. Dabei empfiehlt er[106]), von vornherein die gefundenen Werte nach zwei Argumenten zugleich in eine Tafel mit doppeltem Eingang anzuordnen.

Später hat auch *G. Darwin* Untersuchungen über diese Frage angestellt[107]).

Sind nur zwei Komponenten vorhanden, so kann man aus der beobachteten Höhe (50) und der Bedingung für den Eintritt eines Extremums:

$$(57)\quad 0 = -n_1 A_1 \sin n_1 t + n_1 B_1 \cos n_1 t - n_2 A_2 \sin n_2 t + n_2 B_2 \cos n_2 t$$

zunächst Gleichungen der Form:

$$(58)\quad h \cos nt = A_1 + A_2 F + B_2 G, \quad h \sin n_1 t = B_1 + A_2 f + B_2 g$$

ableiten, in denen F, G, f, g bekannte (langsam veränderliche) Funktionen der Zeit sind. Man kann es meistens so einrichten, dass die

104) U. S. coast survey report f. 1868 [71], app. 5, Nr. 3, p. 75; f. 1874, separater Appendix, Nr. 10, p. 27.

105) 1868, Nr. 22, p. 57; 1874, Nr. 164, p. 161. 1868, Nr. 24, p. 58 nimmt er noch einen weiteren Oberton mit, unter der Voraussetzung, dass zwischen den verschiedenen Amplituden die von einer [unvollständigen] Theorie gelieferten Beziehungen bestehen.

106) 1874, Nr. 167, p. 165; 1875, Nr. 3, p. 2 des S. A. Im Report f. 1878 schliesst sich *Ferrel* schon vielfach an die Engländer an. Vgl. übrigens auch die Darstellung bei *R. Harris*, U. S. coast survey report f. 1894 [95], app. 7, Kap. 3, p. 169 und f. 1897 [98], app. 8, Nr. 58, p. 375. Interpolation von stündlichen Beobachtungen aus solchen der Extrema allein ib. app. 9, Nr. 71, p. 565.

107) Lond. Roy. Proc. 48 (1890), § 3, p. 280; vgl. *Lévy* [93]), Nr. 55, p. 96.

Mittelwerte dieser Funktionen für einen längeren Zeitraum vernachlässigt werden können; dann kann man aus den Gleichungen (58) durch Summation über einen solchen Zeitraum A_1 und B_1 erhalten. Für eine grössere Anzahl von Komponenten verhält sich die Sache im wesentlichen ebenso; nur wird man event. successive Approximationen benutzen müssen, indem man bei der Berechnung einer Komponente einen genäherten Wert einer anderen benutzt und mit dem so gefundenen Wert der ersteren dann den der letzteren korrigiert[108]). Manchmal bedarf es auch der Zerlegung des Beobachtungszeitraums in Unterabschnitte[109]).

Sind n_1, n_2 wenig von einander verschieden, so kann man auch

$$n_2 = n_1 + \nu \tag{59}$$

setzen und ν/n_1 vernachlässigen; man erhält dann Gleichungen der Form[110]):

$$\begin{cases} h \cos n_1 t = R_1 \cos \xi_1 + R_2 \cos (\nu t - \xi_2), \\ h \sin n_2 t = R_1 \sin \xi_1 - R_2 \sin (\nu t - \xi_2). \end{cases} \tag{60}$$

Summiert man hier von $t = 0$ bis $t = \pi/\nu$ und von da bis $t = 2\pi/\nu$, so erhält man vier Gleichungen zur Berechnung von R_1, R_2, ξ_1, ξ_2. Will man mehr als zwei Komponenten so behandeln, so hat man m in eine grössere Anzahl von Teilintervallen zu zerlegen[111]).

Die umgekehrte Frage, wie man aus den gefundenen Gezeitenformeln Höhe und Eintrittszeit der Extrema zweckmässigerweise berechnet, behandelt *Ferrel* zunächst[112]) nur für den Fall, dass die halbtägige Komponente so stark überwiegt, dass man mit Differentialformeln auskommt. Später[113]) empfiehlt er successive Approximationen. Neuerdings ist die Frage ausführlich von *Darwin*[114]) und von *R. Harris*[115]) behandelt worden.

---

108) Lond. Roy. Proc. 48, p. 295.

109) ib. p. 289, 295. Nähere Anweisung zu dieser „partition" § 10, p. 300 und App. E, p. 308. 110) p. 281.

111) ib. 52 (1893), § 2, p. 350.

112) U. S. coast survey report f. 1868, Nr. 22, p. 57; für harmonische Komponenten auch schon *A. Kunzek*, Studien aus der höheren Physik, Wien 1856, § 11, p. 38.

113) ib. f. 1874, separater Appendix, Nr. 90, p. 84; 1878, app. 11, Nr. 37, p. 35.

114) Lond. Trans. 182 A (1892), p. 159; Auszug Lond. Roy. Proc. 49 (1891), p. 130; teilweise auch schon Brit. ass. rep. f. 1886, § 5, p. 50. Die Abhängigkeit der Amplituden und Phasenkonstanten von langsam veränderlichen astronomischen Argumenten spielt hier eine wesentliche Rolle.

115) U. S. coast survey report f. 1894 [95], Nr. 1, p. 131. Er findet:

$$A + \frac{1}{4Aa^2}(b^2B^2 + c^2C^2 + \cdots)$$

19. Abgekürztes Verfahren. Für den Fall, dass stündliche Beobachtungen vorliegen, giebt *Darwin* noch ein abgekürztes, allerdings weniger genaues Verfahren, bei dem auch alle Komponenten, deren Periode nahezu ein Tag oder ein aliquoter Teil eines solchen ist, zusammen berechnet werden. Ist eine solche:

$$R\cos\left(\frac{q\pi}{12}t-\beta t-\zeta\right), \tag{61}$$

unter q eine ganze Zahl, unter β eine kleine Grösse, unter ζ die Phasenkonstante verstanden, so giebt Summation der Beobachtungen einer bestimmten Stunde für n auf einander folgende Tage:

$$R\frac{\sin 12n\beta}{\sin 12\beta}\cos\left\{\frac{q\pi}{12}t-\beta t-\zeta-(12n-1)\beta\right\}. \tag{62}$$

Wird das in

$$\sum\{A_\mu\cos\mu t+B_\mu\sin\mu t\}$$

entwickelt, so haben die Koeffizienten die Werte:

$$\left.\begin{matrix}A_\mu\\B_\mu\end{matrix}\right\}=R\frac{\sin 12n\beta}{24n}\left\{\frac{\left.\begin{matrix}-\cos\\+\sin\end{matrix}\right\}\left[(q+\mu)\frac{\pi}{24}+\zeta+(12n-\tfrac{1}{2})\beta\right]}{\sin\left[(q+\mu)\frac{\pi}{24}-\tfrac{1}{2}\beta\right]}\right. \tag{63}$$

$$\left.+\frac{\begin{matrix}-\cos\\-\sin\end{matrix}\left[(q-\mu)\frac{\pi}{24}+\zeta+(12n-\tfrac{1}{2})\beta\right]}{\sin\left[(q-\mu)\frac{\pi}{24}-\tfrac{1}{2}\beta\right]}\right\},$$

also für hinlänglich grosse Werte von n nahezu:

$$R\frac{\sin 12n\beta}{24\sin\frac{1}{2}\beta}\left\{\begin{matrix}\cos\\\sin\end{matrix}\right\}[\zeta+(12n-\tfrac{1}{2})\beta]. \tag{64}$$

Indem *Darwin* diese Rechnung für jeden von 12 Normalmonaten zu 30 Tagen ausführt, erhält er für jedes A_μ und B_μ die Summe einer kleinen Anzahl von Ausdrücken der Form (64), mit ζ je gleich einer linearen Funktion der Ordnungsnummer τ des Monats. Durch abermalige Entwickelung nach den Vielfachen von τ werden die einzelnen Glieder von einander getrennt und man erhält so viele Gleichungen, als zur Bestimmung der verschiedenen Amplituden R erforderlich sind [116]).

Eine andere Vereinfachung der Berechnung der nahezu ganz-

als Mittelwert der Extrema eines Ausdrucks der Form

$$A\cos(at+\alpha)+B\cos(bt+\beta)+C\cos(ct+\gamma)+\cdots,$$

vorausgesetzt, dass die Zusatzglieder gegen das erste klein sind. Vgl. übrigens auch [219]).

116) Lond. Roy. Proc. 52 (1893), p. 355.

und halbtägigen Komponenten wird erreicht, wenn man die Beobachtungen, die zu vollen Stunden Sonnenzeit vor, resp. nach Mittag gemacht sind, so behandelt, als würden sie zu der entsprechenden Stunde „Spezialzeit" vor, resp. nach Mittag gemacht; im Durchschnitt einer längeren Beobachtungsdauer hat das denselben Effekt, wie wenn man die Amplitude mit einem wenig von 1 verschiedenen Faktor multipliziert und die Epoche um einen kleinen Winkel verschoben hätte[117]).

Auch für den Fall, dass aus Beobachtungen, die nur etwa einen halben oder ganzen Monat umfassen, wenigstens die einflussreichsten Komponenten bestimmt werden sollen, giebt *Darwin* Vorschriften[118]).

20. Zusammenfassung mehrerer periodischer Terme zu einem einzigen von veränderlicher Amplitude und Phase. Eine Summe von Gliedern der Form

$$\sum R_\nu \cos(\lambda_\nu t + b_\nu) \tag{65}$$

lässt sich immer zu einem einzigen Glied

$$R \cos(\lambda_1 t + U) \tag{66}$$

zusammenfassen, wenn dabei R und U Funktionen von t werden dürfen[119]). Aber diese Zusammenfassung ist nicht immer in der Weise möglich, dass dabei U eine stetige Funktion wird und zugleich beständig zwischen endlichen Grenzen eingeschlossen bleibt. Schon *J. L. Lagrange* zeigt, dass das bei einer nur zweigliedrigen Summe stets möglich ist, wenn:

$$|R_1| > |R_2| \tag{67}$$

ist[120]); auch giebt er an, der allgemeine Fall lasse sich ebenso behandeln, wenn eine der Teilamplituden absolut grösser ist, als die Summe der übrigen[121]). Diese Angabe ist erst von *H. Gyldén* bestätigt worden[122]). *Gyldén* glaubte ursprünglich, dasselbe gelte auch

117) ib. § 6, p. 367. Zum Schluss bespricht *Darwin* den Einfluss einer Abrundung der Daten auf die Resultate (§ 9, p. 376). Vgl. auch die entsprechenden Sätze bei *Ch.* u. *F. Chambers*[97]), Nr. 12, p. 371, sowie die Formeln (92) von *Schuster*. 118) Brit. ass. rep. f. 1886, p. 40.

119) Vgl. Gl. (15), sowie die physiologische Diskussion zwischen *L. Hermann*, Arch. Physiol. 47 (1890), p. 360; 48 (1890), p. 189; 56 (1894), p. 479 und *H. Pipping*, Zeitschr. Biol. 27 (1890), p. 436. — Wegen der umgekehrten Aufgabe vgl. [135]).

120) Berl. Nouv. mém. 1782 (84), Nr. 44; Oeuvres 5, p. 283.

121) Nr. 45, p. 284.

122) Traité analytique des orbites absolues 1, Stockh. 1893, Nr. 6, p. 23. An einer späteren Stelle (Nr. 34, p. 112) modifiziert *Gyldén* den Ansatz noch insofern, als er nicht mehr annimmt, dass die Periode des resultierenden Terms (66) mit der Periode einer der Komponenten (65) identisch sei; er giebt für diesen

in allen anderen Fällen, den allein ausgenommen, dass eine Amplitude der Summe aller übrigen gleich ist, er setzt nämlich:

$$(68)\qquad \begin{cases} (\lambda_\nu - \lambda_1)t + b_\nu - b_1 = L_\nu, \\ 1 + R_1^{-1}\sum_{\nu=2} R_\nu \cos L_\nu = X, \\ R_1^{-1}\sum_{\nu=2} R_\nu \sin L_\nu = Y, \\ (1+X)^2 + Y^2 = \vartheta^2 \end{cases}$$

und beruft sich darauf, dass das Minimum von ϑ nur in dem genannten Ausnahmefalle null sein könne[123]). Später erkennt er, dass auch in anderen Fällen diese Funktion zwar nicht null werden, aber der Null beliebig nahe kommen kann[124]); er bedient sich daher jetzt — für den Fall von 3 Komponenten — des folgenden Verfahrens zur Bestimmung der „mittleren Bewegung" der Grösse U: Er bringt zunächst X und Y auf die Form:

$$(69)\qquad \begin{cases} R_1 X = -R_2 \cos \Lambda + R_3 \cos(\mu\Lambda + E_n), & \Lambda = L_2 - (2n+1)\pi, \\ R_1 Y = -R_2 \sin \Lambda + R_3 \sin(\mu\Lambda + E_n), & \mu = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}. \end{cases}$$

Wenn dann E_n in einer gewissen Umgebung von π liegt, werden je zwei Nullstellen von $1+X$ durch eine Nullstelle von Y getrennt werden, und zwar wird diese Umgebung begrenzt sein durch diejenigen Werte $E^{(0)}$ und $2\pi - E^{(0)}$ von E_n, für die $1+X$ und Y zugleich null werden können. Gehört E_n dieser Umgebung an, so wächst U um 2π, wenn Λ von $-\pi$ bis $+\pi$ wächst; andernfalls kehrt U dabei zu seinem Ausgangswert zurück, ohne einen vollen Umlauf ausgeführt zu haben.

Giebt man dem n der Reihe nach die Werte 1, 2, 3, so fallen schliesslich auf gleiche Stücke der Kreisperipherie gleich viele Werte von E_n; die gesuchte mittlere Bewegung von U beträgt also[125]):

$$(70)\qquad \bar{\mu} = \frac{\pi - E^{(0)}}{\mu}.$$

Fall auch Formeln zur Berechnung von U, die durch geeignete Wahl der Periode so eingerichtet werden können, dass Säkularglieder aus ihnen wegfallen.

123) p. 28.

124) Stockh. astr. Iaktt. 5, 1895; Auszug Petersb. Bull. (5) 1 (1894), p. 379.

125) Nr. 22, p. 71. *Gyldén* giebt auch eine analytische Definition der mittleren Bewegung durch das Integral

$$\bar{\mu} = \int_0^\infty \frac{dU}{dL_2}\, dL_2$$

und Anweisung zu numerischer Berechnung desselben, durch Abspaltung der

Gyldén glaubt, dass auch der Fall einer grösseren Anzahl von Komponenten keine wesentlich anderen Resultate geben werde, solange $|R_1| + |R_2| + |R_3|$ grösser sei als die Summe der absoluten Beträge der übrigen Komponenten; nur könne dann event. das Wachsen von U durch ganze retrograde Umläufe unterbrochen werden.

Verwandt mit der hier behandelten Frage, aber nicht so scharf zu formulieren ist die von *R. Harris*[126]), unter welchen Umständen man von einem Ausdruck der Form (65) die erste Komponente als „prädominierend" ansehen könne, so dass man die Extrema des ganzen Ausdrucks aus denjenigen des ersten Gliedes durch Differentialformeln ableiten könne. *Harris* findet, dazu sei

$$Aa > Bb + Cc + \cdots \tag{71}$$

eine notwendige, diese Ungleichung zusammen mit

$$Aa^2 > Bb^2 + Cc^2 + \cdots \tag{72}$$

eine hinreichende Bedingung.

III. Aufsuchung versteckter Periodizitäten.

21. Die Methode von Lagrange. In den bisher besprochenen Untersuchungen war stets angenommen, dass die Perioden der einzelnen Komponenten einer zusammengesetzten Erscheinung bekannt und nur noch ihre Amplituden und Phasen aus den Beobachtungen zu bestimmen seien. Anders liegt die Frage, wenn man zwar weiss oder wenigstens Grund zu der Annahme zu haben glaubt, dass sich die beobachtete Erscheinung durch eine Summe von periodischen Gliedern darstellen lassen müsse, wenn aber auch die Perioden der einzelnen Glieder unbekannt sind. Die Untersuchung dieses Falles stützt *J. L. Lagrange*[127]) auf den Satz, dass man jede Reihe, deren allgemeines (m^{tes}) Glied die Form hat

Umgebung kritischer Punkte und Entwicklung der übrigen Bestandteile nach geeigneten Hülfsvariabeln (Nr. 17, p. 56 ff.). Die Konvergenz dieser Entwicklungen hält er selbst nicht in allen Fällen für bewiesen, doch könne Divergenz nur in „unendlich unwahrscheinlichen" Fällen eintreten.

126) U. S. coast survey report f. 1894 [95], App. 7, Nr. 10, p. 137.

127) Par. Hist. 1772^2 (75); Oeuvres 6, p. 505. *Lagrange* knüpft seine Untersuchung an das Problem der Bestimmung der Ungleichheiten der Planetenbahnen direkt aus den Beobachtungen; er setzt auseinander, dass sowohl die alten Vorstellungen von Bewegungen in exzentrischen Kreisen und Epicykeln, als auch die neueren auf den Ansatz (73) führen. Dass *Lagrange*'s Verfahren keine praktische Anwendung fand, liegt wohl an den raschen Fortschritten der *deduktiven Störungstheorie* in jenen Jahren. — An späterer Stelle (Berl. astr. Jahrb. 1783 [80], Nr. 12; Oeuvres 7, p. 548) stellt *Lagrange* sein Verfahren noch einmal dar, in-

(73) $$x^m\{R_1 \sin(mn_1 + \xi_1) + R_2 \sin(mn_2 + \xi_2) + \cdots\}$$

(die R, n und ξ von m unabhängig) als eine rekurrente Reihe betrachten, und dass man von jeder solchen Reihe zu dem Bruch, dessen Entwicklung sie erzeugt, durch eine Art von Kettenbruchverfahren zurückgelangen kann. Sind Zähler und Nenner des erzeugenden Bruches je ein reziprokes Polynom, so kann man die Reihe (73) durch die Substitution

(74) $$z = \frac{x}{1 + x^2}$$

in eine andere rekurrente Reihe von nur halb so hoher Ordnungszahl überführen[128]); dieselbe Vereinfachung kann man auch dadurch erreichen, dass man bei jedem Schritt des Kettenbruchverfahrens die Division bis zu den Gliedern mit x^2 fortsetzt[129]). Soll das allgemeine Glied einer rekurrenten Reihe speziell die Form (73) haben, so muss der Nenner des sie erzeugenden Bruches das Produkt

(75) $$(1 - 2x\cos n_1 + x^2)(1 - 2x\cos n_2 + x^2)\ldots$$

sein; jeder von den Partialbrüchen mit quadratischem Nenner, in die ein derartiger Bruch sich zerlegen lässt, liefert einen der Summanden des allgemeinen Reihengliedes (73)[130]). Aus diesen Sätzen entwickelt *Lagrange* schliesslich das folgende Verfahren[131]). Seien:

(76) $$\ldots Y_{-2},\ Y_{-1},\ Y_0,\ Y_1,\ Y_2 \ldots.$$

die beobachteten Funktionswerte; man bilde die beiden Potenzreihen:

(77) $$f_1(x) = y_0 + \sum(y_\nu + y_{-\nu})x^\nu,\quad f_2(x) = \sum(y_\nu - y_{-\nu})x^\nu$$

und entwickle die Quotienten

(78) $$\frac{1 - x^2}{f_1(x)},\quad \frac{1}{f_2(x)}$$

in Kettenbrüche, indem man dabei jede einzelne Division bis zu Gliedern zweiten Grades fortsetzt. Die Kettenbrüche breche man an geeigneter Stelle ab, reduziere sie zu gewöhnlichen Brüchen und führe z durch (74) ein; man wird bezw. Ausdrücke der Form erhalten:

(79) $$\frac{1 - x}{1 + x^2}\frac{V_1}{Y},\quad \frac{1 - x}{1 + x^2}\frac{V_2}{Y},$$

unter Y, V_1, V_2 rationale ganze Funktionen von z verstanden. Endlich zerlege man V_1/Y und V_2/Y in Partialbrüche:

dem er das Wort Kettenbruch als den Astronomen ungewohnt vermeidet und nur von der Auflösung linearer Gleichungen redet.

128) Nr. 27, p. 559. 129) Nr. 30, p. 565. 130) Nr. 35, p. 573.

131) Nr. 37, p. 580. *Lagrange* behandelt auch den Fall gerader Gliederzahl, Nr. 40, p. 587.

$$(80) \qquad \frac{V_1}{Y} = \sum \frac{F_\mu}{1 - c_\mu z}, \quad \frac{V_2}{Y} = \sum \frac{G_\mu}{1 - c_\mu z};$$

dann sind die gesuchten Perioden, Amplituden und Phasenkonstanten gegeben durch[132]):

$$(81) \qquad \cos n_\mu = \frac{1}{2} c_\mu, \quad \operatorname{tg} \xi_\mu = \frac{2F_\mu}{G_\mu} \sin n_\mu, \quad R_\mu = \sqrt{F_\mu + \frac{G_\mu}{4 \sin^2 n_\mu}}.$$

Später[133]) giebt *Lagrange* noch den Satz: Bildet man aus der gegebenen Reihe von Funktionswerten zunächst deren Differenzenreihen, so bilden deren mittelste Glieder zwei rekurrente Reihen:

$$(82) \qquad Y_0, \ \Delta^2 Y_0, \ \Delta^4 Y_0, \ldots$$

und

$$(83) \qquad \Delta Y_0, \ \Delta^3 Y_0, \ \Delta^5 Y_0, \ldots$$

deren Rekursionsskalen nur reelle Koeffizienten haben, die sich also im Fortschreiten mehr und mehr geometrischen Reihen nähern. Das ermöglicht die Bestimmung zunächst derjenigen Teilperiode, die am nächsten an 1/2 liegt; eine Modifikation des Verfahrens giebt auch die übrigen[134]).

22. Die Sätze von Nervander und Buys-Ballot. In zahlreichen Fällen ist man erst durch den Anblick der Tabelle oder noch besser der Kurve, die den Verlauf einer Erscheinung darstellen, auf eine dieser Erscheinung innewohnende Periodizität aufmerksam gemacht und zu dem Versuch veranlasst worden, diese Periodizität auch quantitativ zu bestimmen. Dabei nahm man zunächst den Abstand zweier gleichnamigen Extrema, bezw. hervorragenden Extrema, als Länge der Periode. Da die Eintrittszeiten der Extrema sich nicht immer ganz scharf bestimmen lassen, dividierte man den Abstand zweier

132) Die Frage, wie weit man mit diesem Verfahren bei Beobachtungen von begrenzter Genauigkeit vernünftigerweise gehen darf, erörtert *Lagrange* selbst, Nr. 45, p. 620. Ausgedehnten Beobachtungsreihen gegenüber liesse es sich in der vorliegenden Gestalt sicher nicht anwenden; aber vielleicht ist es noch verbesserungsfähig. Ausser dem von *Lagrange* selbst durchgerechneten Beispiel der Zeitgleichung (Nr. 41, p. 588) scheint kein Fall praktischer Anwendung vorzuliegen. Die Diss. von *Hallström*, Åbo 1802, aus deren Titel man vielleicht schliessen darf, dass *Lagrange*'s Untersuchungen in ihr weitergeführt sind, war mir nicht zugänglich.

133) Berl. astr. Jahrb. 1783 [80], Nr. 8; Oeuvres 7, p. 544.

134) Nr. 11, p. 547. Die von *Lagrange* in Aussicht gestellte Anwendung dieses Verfahrens auf Fehler in *Halley*'s Jupiter- und Saturntafeln ist nicht erschienen. Auch sonst scheint es weder von ihm selbst, noch von andern je praktisch erprobt worden zu sein; in den meisten Fällen werden die Fehler der Beobachtungen in den Differenzen sich zu sehr häufen.

möglichst weit von einander entfernten Extrema durch die Anzahl der dazwischen liegenden Perioden; die letztere kann — als ganze Zahl — aus einem nur näherungsweisen Wert der Periode bestimmt werden, auch wenn nicht alle zwischenliegenden Extrema deutlich ausgeprägt gewesen und beobachtet worden sind[135]).

Die Mängel dieses Verfahrens — Nichtberücksichtigung möglicher Verschiebungen der Extrema durch den Einfluss sekundärer Komponenten; Ausnutzung nur eines kleinen Teiles der Beobachtungen; Unmöglichkeit, die Perioden der sekundären Komponenten unabhängig von dem bei Bestimmung der Hauptkomponenten begangenen Fehler zu erhalten — liegen auf der Hand.

Zu besseren Methoden legt *C. H. D. Buys-Ballot*[136]) den Grund durch die folgenden Sätze:

1) Hat man eine Reihe von Zahlen, die erst zu-, dann abnehmen, und sich nach je n Termen periodisch wiederholen, und ordnet man sie so, dass die $(n+1)^{\text{te}}$ unter die erste, die $(n+2)^{\text{te}}$ unter die zweite u. s. w. zu stehen kommen, so bilden die Kolonnensummen eine Folge derselben Art.

2) Ordnet man sie aber so, dass erst die $(n+2)^{\text{te}}$ oder die $(n+3)^{\text{te}}$ ... unter die erste zu stehen kommen, so verwischt sich in

135) In der im Text angegebenen Weise hat man z. B. seit lange die Perioden des Lichtwechsels der veränderlichen Sterne bestimmt; auch zu genaueren Bestimmungen der Umlaufszeiten der Himmelskörper hat man kein anderes Verfahren. Die komplizierteren Verhältnisse, die bei einigen veränderlichen Sternen vorliegen, scheinen der harmonischen Analyse noch nicht unterworfen worden zu sein; die Ansätze von *A. Argelander,* Bonn Astr. Beob. 7, 1869 gehen nach anderer Richtung (Darstellung der Eintrittszeiten der Extrema durch parabolische (z. B. p. 342) oder trigonometrische Interpolation p. (340)). Durch ähnliche Interpolationsformeln hat *S. C. Chandler* auch die Polschwankungen zunächst dargestellt (Astr. J. 12 (1893), p. 21); später setzt er an die Stelle der eingliedrigen Formel mit variabeln Koeffizienten eine zweigliedrige mit konstanten, ib. p. 97), noch später bestimmt er auch von den Koeffizienten dieser letzteren wieder „Ungleichheiten" (ib. p. 14 (1895), p. 73). Eine prinzipielle Untersuchung der Frage, unter welchen Umständen eine eingliedrige Formel mit variablen Koeffizienten durch eine mehrgliedrige mit konstanten Koeffizienten ersetzt werden kann — also die Umkehrung der unter Nr. **20** besprochenen Fragestellung — wäre sehr wünschenswert.

136) Les changements périodiques de température, Utrecht 1847, § 11, p. 34 (vorl. Mitteilung Ann. Phys. Chem. 68 (1846), p. 205). Weniger scharf formuliert treten die zu diesen Sätzen führenden Überlegungen kurz vorher bei *J. J. Nervander* auf, Petersb. Bull. 3 (1845), col. 2; Ann. Phys. Chem. 68 (1846), p. 193. Im wesentlichen übereinstimmend auch *R. Wolf,* Astr. Mitt. 18 (1865), p. 249. — Formeln zur quantitativen Bestimmung dieser Änderung von Amplitude und Phase giebt *J. P. van der Stok,* Natuurk. Tijdschrift voor Nederl. Indië 48 (1889), p. 168.

den Kolonnensummen das Periodizitätsgesetz; und zwar um so mehr, je grösser die Zahl der benutzten Perioden ist, und je mehr man sich über die Länge der Periode getäuscht hat.

3) Sind die der Rechnung unterworfenen Zahlen durch Superposition verschiedener Perioden entstanden, so erscheint in den Kolonnensummen nur eine dieser Perioden.

4) Hat man die Periode zu klein (zu gross) genommen, so rückt das Maximum der Kolonnensummen bei successiver Addition immer neuer Zeilen immer weiter nach rechts (nach links), und zwar um so rascher, je mehr man sich in der Länge der Periode getäuscht hat.

Weiter ausgebildet ist das auf diese Sätze sich stützende Verfahren von *L. Hornstein*[137]: Man kann den Wert der sich aus der Rechnung ergebenden Amplitude als Funktion der angenommenen Periodenlänge durch eine ganze Funktion zweiten Grades interpolatorisch darstellen und dann denjenigen Wert der Periodenlänge, der diese Funktion zu einem Maximum macht, als den wahrscheinlichsten Wert der Periode ansehen.

Andererseits kann man auch Periodenlänge und Phasenkonstante zusammen aus den beobachteten Epochen der Extrema nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmen[138].

23. Pulling und pushing. Die grosse Mühe der Bestimmung der Amplituden zu einer grösseren Anzahl angenommener Perioden lässt sich nach einem von *B. Stewart* und *W. Dodgson*[139] auf Veranlassung des Ausschusses der British Association für Sonnenphysik ausgearbeiteten Verfahren vermindern. Sie addieren nämlich nicht sämtliche nach der zuerst angenommenen Periode T kongruenten Beobachtungen, sondern nur die je einem bestimmten grösseren Zeitraum J angehörenden, so dass sie p Reihen von je n Mittelwerten er-

137) Wien. Ber. 64^2 (1861), p. 69. *Hornstein* bestimmt auch die zugehörige Phasenkonstante durch eine entsprechende Interpolation.

138) *Spörer,* Astr. Nachr. 98 (1880), col. 96; ebenso neuerdings *S. Newcomb,* Astroph. J. 13 (1901), p. 5. *Newcomb* benutzt ausser den Extremen auch noch Mittelphasen, deren Eintrittszeiten sich häufiger genauer bestimmen lassen, als die der Extrema. Vgl. übrigens [88]).

139) Lond. Roy. Proc. 29 (1879), Nr. 9, p. 111; ib. p. 307, Nr. 6 bestimmen sie auch eine Phasendifferenz zwischen den Beobachtungen derselben Grösse an zwei verschiedenen Orten durch solches pulling und pushing. — Übrigens ist die Idee, auf der das pulling und pushing beruht, schon in dem Verfahren enthalten, dessen sich *L. Ferrel* (U. S. coast survey, separater Appendix zum Report f. 1874, Nr. 176, p. 178) bedient, um die Gezeitenbeobachtungen bei Berechnung von Komponenten nahe gleicher Periode nicht jedesmal ganz neu ordnen zu müssen.

halten. In dem so entstehenden Schema rücken sie cyklisch jede Zeile um je eine Einheit weiter nach links („pulling things to the left"); wird dann jede Kolonne summiert, so geben die Summen den mittleren Gang der Erscheinung für eine angenommene Periodenlänge

$$T\left(1+\frac{1}{n}\frac{T}{J}\right). \tag{84}$$

Es wird dann sowohl dieser Prozess, als auch der umgekehrte („pushing things to the right") noch öfter wiederholt; natürlich häufen sich die Fehler allmählich. Will man nur um ein halbes Beobachtungsintervall verschieben, so kann man die dazu nötigen Zwischenwerte graphisch interpolieren[140]).

Als Weiterbildung dieser Methode kann das Verfahren von *J. P. van der Stok*[141]) angesehen werden. Er teilt die ihm zur Verfügung stehenden 7740 Beobachtungen in 10 Tafeln, jede zu 30 Zeilen und 26 Kolonnen; um die Amplitude für eine Periode von 25,8 Beobachtungsintervallen zu bekommen, lässt er in der 14. Kolonne die 3., 8., 13., ... Zeile frei. Ist $2\pi/n$ die wahre Periode, so wird die Summe der Zahlen der x^{ten} Kolonne der p^{ten} Tafel (vgl. [62]):

$$R\frac{\sin 30\cdot 12{,}9n}{\sin 12{,}9n}\sin\left\{\frac{25{,}8}{26}nx+\xi+29\cdot 12{,}9n+30(p-1)\cdot 25{,}8n\right\}. \tag{85}$$

Werden dann die Phasen der Summen in der p^{ten} Tafel um $(p-1)\varrho\alpha$ verschoben, so wird die Summe der x^{ten} Kolonnen aller p Tafeln:

$$R\frac{\sin 30\cdot 12{,}9n}{\sin 12{,}9n}\,\frac{\sin 10(30\cdot 12{,}9n+0{,}5\varrho\alpha)}{\sin(30\cdot 12{,}9n+0{,}5\varrho\alpha)} \cdot\sin\left\{\frac{25{,}8}{26}nx+\xi+299\cdot 12{,}9n+4{,}5\varrho\alpha\right\} \tag{86}$$

entsprechend einer Gruppierung der Beobachtungen nach einer Periode:

$$25{,}8+\frac{\varrho\alpha}{30n}. \tag{87}$$

Van der Stok nimmt $\alpha=0{,}3\pi/26$, $\varrho=-4,-3,\ldots,+5,+6$; die sich ergebende Phasenverschiebung jeder Summenreihe gegen die vorhergehende müsste dann etwa $18^0\,42'$ betragen; das giebt eine gewisse Kontrolle dafür, wie weit die Voraussetzungen erfüllt sind. Mit einigen Abkürzungen nehmen die 11 so erhaltenen Gleichungen zwischen den aus der Formel und den aus den Beobachtungen sich ergebenden Amplituden die Form an:

$$m_\varrho=X\frac{\sin 10(387\xi+0{,}5\varrho\alpha)}{\sin(387\xi+0{,}5\varrho\alpha)}. \tag{88}$$

140) Nr. 10, p. 114.

141) Natuurk. Tijdschr. voor Nederl. Indië 48 (1889), p. 166; populärere Darstellung ib. p. 227. Auch Batavia Observ. 10, App. 1.

Andererseits kann man auch die berechneten Amplituden durch eine Interpolationsformel der Gestalt[142]):

$$m_\varrho = A + B\varrho + C\varrho^2 + \cdots \tag{89}$$

darstellen; die Vergleichung des aus dieser Formel sich ergebenden Wertes von ϱ, für den m_ϱ Maximum wird, mit dem aus (88) folgenden:

$$\varrho = -\frac{387\,\xi}{0{,}5\,\varrho\,\alpha} \tag{90}$$

giebt den Wert von ξ und damit den von n. Eventuell wird auch eine Entwickelung nach Potenzen einer anderen kleinen Grösse zweckmässig sein[143]).

Formeln, die auf derselben Idee wie das pulling und pushing beruhen, aber grössere Genauigkeit geben, teilt *A. Schuster*[144]) mit. Ist näherungsweise:

$$pT_1 \sim snT, \tag{91}$$

so ist auch:

$$\frac{2}{pT_1}\int_0^{pT_1} f(t)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\frac{2\pi t}{T_1}\,dt \sim \frac{nT}{pT_1}\sum_{m=1}^{s}\int_{(m-1/nT)}^{mnT} f(t)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(\frac{2\pi t}{T}+\alpha_m\right)dt \tag{92}$$

mit:

$$\alpha_m = (2m-1)n\pi(TT_1^{-1})\,. \tag{93}$$

24. Andere neuere Ansätze. Im Anschluss an die Untersuchung von *Stewart* und *Dodgson*[139]) bemerkt *G. Stokes*[145]): Enthält der Ausdruck einer Funktion $f(t)$ einen Summanden:

$$R\sin(mt+\xi), \tag{94}$$

so enthalten die unbestimmten Integrale:

$$\int f(t)\sin nt\,dt, \quad \int f(t)\cos nt\,dt \tag{95}$$

bezw. die Summanden:

$$\frac{R}{2(m-n)}\sin(mt-nt+\xi), \quad \frac{R}{2(m-n)}\cos(mt-nt+\xi), \tag{96}$$

also, wenn n von m wenig verschieden ist, grosse langperiodische Ungleichheiten. Indem man diese Ungleichheiten der durch einen harmonischen Analysator gelieferten Aufzeichnung jener Integrale entnimmt, kann man die Differenz $m-n$ bis auf das Vorzeichen bestimmen; das Vorzeichen ergiebt sich daraus, dass für $m>n$ das Sinusintegral, für $m<n$ das Kosinusintegral gegen das andere um eine Viertelperiode zurück ist.

142) p. 175. *Van der Stok* bedient sich hier der Methode der kleinsten Quadrate; vgl. dazu Fussn. [88]).

143) Nr. 3, p. 178. 144) Cambr. Trans. 18 (1900), p. 128.

145) Lond. Roy. Proc. 29 (1879), p. 122.

Vinayek Narayeu Nene[146]) schliesst aus der Identität (4): Werden aus je m aufeinander folgenden Gliedern der Folge

$$(97)\quad \sum_\nu R_\nu \sin \xi_\nu,\quad \sum_\nu R_\nu \sin (b_\nu + \xi_\nu),\ \ldots\quad \sum_\nu R_\nu \sin (nb_\nu + \xi_\nu)$$

die Mittelwerte gebildet, so wird das allgemeine (μ^{te}) Glied der so entstehenden „ersten Mittelwertreihe“:

$$(98)\qquad \sum_\nu \frac{R_\nu}{q_\nu} \sin\left(\frac{m+2\mu-1}{2} b_\nu + \xi_\nu\right),\quad q_\nu = \frac{m \sin \frac{b_\nu}{2}}{\sin \frac{m b_\nu}{2}}.$$

Ist m ungerade, so kommen hier dieselben Argumente vor wie in (97); *Nene* bildet dann aus den Differenzen: Beobachtung — erster Mittelwert die „erste Restreihe“, deren allgemeines Glied ist:

$$(99)\qquad \sum_\nu \left(1 - \frac{1}{q_\nu}\right) R_\nu \sin\left(\frac{m+2\mu-1}{2} b_\nu + \xi_\nu\right).$$

Aus diesen Resten bildet er zweite Mittelwerte und zweite Reste u. s. f.; schliesslich ist das $(n - (m-1)r)^{\text{te}}$ Glied der r^{ten} Restreihe[147]):

$$(100)\qquad \sum_\nu \left(1 - \frac{1}{q_\nu}\right)^r R_\nu \sin\left(\frac{2n - mr + r - 2}{2} b_\nu + \xi_\nu\right).$$

Sind nun die Winkel $mb_1, mb_2, \ldots$ alle kleiner als 2π, so konvergieren die Summen (100) mit wachsendem r gegen Null; ist aber $2\pi \leqq mb_1 < 4\pi$, $mb_2 < 2\pi$, $mb_3 < 2\pi, \ldots$, so reduzieren sich diese Summen mit wachsendem r merklich auf ihre ersten Glieder. Damit kann man die Frage entscheiden, ob in dem Ausdruck einer vorgelegten Beobachtungsreihe ein Glied von einer Periode zwischen mc und $2mc$ enthalten ist, wenn c das Beobachtungsintervall bedeutet[148]). Dabei kann m noch so gewählt werden, dass $-q_1$ möglichst gross wird. Sind mehrere solche Komponenten vorhanden, so liefert das Verfahren nur diejenige mit der längsten Periode.

25. Kritik vom Standpunkte der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Inwiefern kann überhaupt durch Rechnungen der in den letzten Nummern besprochenen Art das Vorhandensein einer Komponente mit der angenommenen Periode in dem mathematischen Ausdruck der beobach-

146) ib. 36 (1884), p. 361; mit „suggestions“ von *Ch. Chambers*. *Nene* behandelt auch den Fall eines geraden m; dabei fasst er je zwei Glieder der ersten Mittelwertreihe zu einer zweiten zusammen.

147) Nr. 13, p. 371.

148) Nr. 22, p. 378. Kurze Perioden von merklicher Amplitude müssen eventuell vor Anwendung des Verfahrens durch Ausgleichen (smoothing) entfernt werden (Nr. 26, p. 380; vgl. aber die gegenteilige Bemerkung von *A. Schuster*[158]).

teten Erscheinung als bewiesen angesehen werden? Diese Frage bespricht für die elementare Methode, bei der aus einem deutlichen Gang der Mittelwerte

$$(101) \qquad M_\nu = \frac{1}{r}\sum_{\varrho=0}^{r-1} f\left(\varrho T + \frac{\nu T}{n}\right) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

auf die Existenz einer Komponente der Periode T geschlossen wird, bereits *R. Strachey*[149]). Er bildet die durchschnittlichen Abweichungen:

$$(102) \qquad E_\nu = \frac{1}{r}\sum_{\varrho=0}^{r-1}\left| M_\nu - f\left(\varrho T + \frac{\nu T}{n}\right)\right|$$

und aus ihnen das Hauptmittel:

$$E = \frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} E_\nu;$$

fällt dieses nicht wesentlich kleiner aus, als das Mittel aus allen $|M - f|$,[150]) unter M das Gesamtmittel aus allen f verstanden, so erklärt er das Resultat für illusorisch. Nachträglich präzisiert er noch genauer: liegt keine Periodizität der angenommenen Art vor, so wird der „wahrscheinlichste" Wert (I D 2, Nr. 9, *Bauschinger*) der Differenz $|M - f|$ proportional zu $E/\sqrt{r}$ sein, also das Produkt $\sqrt{r}\,\Sigma|M - f|$ mit wachsendem r gegen nE konvergieren; liegt aber Periodizität der gesuchten Art vor, so konvergiert $\Sigma|M - f|$ selbst gegen eine von Null verschiedene Grenze[151]).

Die entsprechende Kritik des *Hornstein*'schen Verfahrens[137]) liefert *A. Schuster*[152]). Er ordnet die vorliegenden $p = nr$ Beobachtungen in n Kolumnen zu je r, bildet die Kolumnensummen $T_1, T_2, \ldots, T_n$ und stellt sie durch die *Bessel*'sche Formel dar. Ist nur der jedesmalige Eintritt eines bestimmten Ereignisses notiert, so gehen die Gleichungen (15) über in:

$$(104) \qquad B_0 = A_0 = p, \quad nA_1 = 2\Sigma\cos kt_\nu, \quad nB_1 = 2\Sigma\sin kt_\nu;$$

dabei bedeuten die t_ν die Zeiten des Eintritts des Ereignisses, $T = 2\pi/k$ die angenommene Periode[153]). Aus einem von Lord *Rayleigh* bei

149) Lond. Roy. Proc. 26 (1877), p. 249.

150) „Mean departure from mean of whole" nach der Terminologie von *Stewart* u. *Dodgson*, Manch. mem. (3) 8 (1884), Nr. 9, p. 62. Sie ist gleich $2/\pi$ mal der Amplitude.

151) Lond. Roy. Proc. 26 (1877), p. 259.

152) Terr. Magnetism 3 (1898), p. 13; Auszug Lond. Roy. Proc. 61 (1897), p. 455. Populäre Darstellung in *Schuster*'s presidential address, Nature 66 (1902), p. 614.

153) Nr. 2, p. 14. Zeigen die Ereignisse eine gewisse Tendenz zu gruppen-

optischen Untersuchungen gefundenen Satze ergiebt sich dann: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass, bei ganz willkürlichen t_ν, R_1/R_0 grösser als

$$2\sqrt{\frac{k}{p}} \tag{105}$$

ausfällt, beträgt e^{-k}. Man kann also nur dann mit einiger Wahrscheinlichkeit auf das wirkliche Vorhandensein einer Komponente mit der Periode T schliessen, wenn man ein beträchtliches Beobachtungsmaterial zur Verfügung hat. Für den Fall, dass nicht der Eintritt eines Ereignisses, sondern der Wert einer veränderlichen Grösse beobachtet ist, gelten analoge Resultate[154]).

Ferner bildet *Schuster* aus den beiden Integralen:

$$a = \int_\tau^{\tau+nT} f(t)\cos kt\,dt, \quad b = \int_\tau^{\tau+nT} f(t)\sin kt\,dt, \quad \left(k = \frac{2\pi}{T}\right) \tag{106}$$

den Wert

$$R = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{107}$$

und aus den Werten, die dieses R bei festgehaltenem k und n als Funktion von τ annimmt, den Mittelwert U.[155]) Die graphische Darstellung dieses Mittelwerts als Funktion der Periode T nennt er das Periodogramm der Erscheinung. Ist T keine wahre Periode, so wächst U mit wachsendem n wie $\sqrt{n}$ und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein einzelner Wert von R grösser als λU ausfällt, beträgt $e^{-\frac{\pi\lambda^2}{4}}$; ist aber T eine wahre Periode, so wächst U wie n selbst. Daraus ergiebt sich die Regel[156]): Liefert die Diskussion von n Beobachtungen ein Periodogramm von der durchschnittlichen Höhe a, so braucht man mindestens $16 n a^2 b^{-2}$ Beobachtungen, um mit Sicherheit auf die Existenz einer Periode von der Amplitude b schliessen zu können. Besonders ist übrigens die Möglichkeit des Auftretens von „spurious periodicities“ zu beachten[157]): wird z. B. von $\cos qt$ die zur Periode $2\pi/k$ gehörende Komponente bestimmt und umfasst der Beobachtungs-

weisem Auftreten, so sind die Schlüsse noch etwas zu modifizieren (Nr. 4, p. 19; Nr. 6, p. 22). 154) Nr. 5, p. 20.

155) Nr. 7, p. 23. *Schuster* bemerkt die Analogie seines Periodogramms zu dem Spektrum einer Lichtquelle: Vergrösserung des Boobachtungszeitraums habe denselben Effekt, wie Wahl eines Spektralapparates von grösserer auflösender Kraft. — Neuerdings (Cambr. Proc. 18 (1900), p. 106) zieht es *Schuster* übrigens vor, nicht die Amplitude, sondern ihr Quadrat (die Intensität) als Ordinate seines Periodogramms aufzutragen.

156) Terr. Magn. 3, Nr. 9, p. 25.

157) Nr. 12, p. 30; vgl. auch die anders geführte Rechnung Cambr. Trans. 18, p. 109.

zeitraum n dieser Perioden, so findet man für deren Amplitude den Wert:

$$\frac{2}{q+k}\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\sqrt{q^2\cos^2\alpha + k^2\sin^2\alpha}, \quad \alpha = \frac{n\pi(q-k)}{k}, \tag{108}$$

der sehr klein ist, ausser wenn q und k wenig von einander verschieden sind. Im letzteren Falle sind seine Maxima nahezu durch die Wurzeln der Gleichung:

$$\operatorname{tg}\alpha = \alpha \tag{109}$$

bestimmt; diese Maxima können in einem solchen Falle thatsächlich nicht vorhandene Periodizitäten vortäuschen. Man erkennt sie aber daran, dass sie mit der Dauer des Beobachtungszeitraums ihre Lage ändern.

Die vielfach geübte Ausgleichung der Beobachtungen vor der Aufsuchung der Perioden findet *Schuster* nur gerechtfertigt, wenn man durch sie erreicht, dass vorher versteckte Periodizitäten augenfällig werden; andernfalls werden durch sie (vgl. die Formeln (23) und (38)) die zu verschiedenen Perioden gehörenden Amplituden so stark und so verschiedenartig geändert, dass die Auswahl der maximalen dadurch gestört werden kann[158]).

Die ablehnende Haltung, die *Fr. H. Bigelow*[159]) *Schuster*'s Resultaten gegenüber einnimmt, beruht hauptsächlich darauf, dass *Bigelow* überhaupt nicht an die Darstellbarkeit der in Frage kommenden Erscheinungen durch die Formel (65), mit konstanten λ_ν glaubt; er sieht es vielmehr — wie übrigens früher schon *D. J. Korteweg*[159a]) unter Zustimmung von *R. Wolf*[160]) — für wahrscheinlich an, dass man die Perioden selbst als veränderlich ansehen müsse[135]). Solche veränderliche Perioden würden aber durch die Summation über einen längeren Beobachtungszeitraum verwischt werden.

Die Frage der Polschwankungen[135]) lässt entsprechende Untersuchungen für die simultane Darstellung mehrerer willkürlicher Funktionen wünschen.

IV. Hülfsmittel zur Ausführung der Rechnungen.

26. Rechenschemata für spezielle Werte der Anzahl der Beobachtungen. Für die wirkliche Ausführung der Beobachtungen dienen in erster Linie die Formeln von Nr. 4. Für spezielle Werte der An-

158) Terr. Magn. Nr. 13, p. 32; Lond. Roy. Proc. Nr. 3, p. 458.
159) Wash. philos. Bull. 14 (1903), p. 222.
159a) Wien. Ber. 88 (1883), p. 1017.
160) Astr. Mitt. 66 (1886), p. 224.

zahl der Beobachtungen — praktisch kommen fast nur gerade, eigentlich nur durch vier teilbare in Betracht — lassen sich die Rechnungen noch mannigfach abkürzen und schematisieren. Ausgearbeitete Vorschriften zu diesem Zwecke geben:

für $n = 2$, $n = 3$ *H. Fritsche*[161]);

für $n = 4$ *J. U. Le Verrier*[162]), *M. Dechevrens*[163]), *Fritsche*[161]);

für $n = 6$ *Dechevrens*[163]), *Fritsche*[161]);

für $n = 8$ *A. Bravais*[41]), *M. Koller*[164]), *Le Verrier*[161]), *A. Smith*[165]), *J. J. Åstrand*[166]), *Dechevrens*[162]), *A. Nippoldt* jun.[167]), *Fritsche*[161]);

für $n = 9$ *E. B. Wedmore*[168]), *Fritsche*[161]);

für $n = 10$ *Dechevrens*[163]), *Fritsche*[161]);

für $n = 12$ *C. F. Gauss*[169]), *Fr. Carlini*[170]), *J. C. E. Schmidt*[171]), *Bravais*[41]), *Koller*[164]), *A. Kunzek*[172]), *J. D. Everett*[173]), *F. Jenkin* und *J. A. Ewing*[174]), *H. Schneebeli*[175]), *L. Grossmann*[176]), *Dechevrens*[163]), *C. Runge*[177]), *Fritsche*[161]);

für $n = 16$ *Le Verrier*[162]), *J. Macé de Lépinay*[178]);

für $n = 18$ *Fritsche*[161]);

für $n = 24$ *Koller*[164]), *Kunzek*[171]), *T. R. Robinson*[179]), *Schneebeli*[175]), *Ferrel*[179a]), *J. Lahr*[180]), *Kirsch*[181]), *R. Strachey*[182]), *Grossmann*[176]), *Wedmore*[168]), *Dechevrens*[163]), *C. Kassner*[184]), *Fritsche*[161]);

---

161) Atlas des Erdmagnetismus, Riga 1903, p. 22.

162) Par. Observ. ann. 1 (1855), Nr. 35, p. 137; Nr. 36, p. 143.

163) Linc. Pontif. mem. 16 (1899), p. 165; Erläuterungen ib. 17, 1900.

164) Wien. Denkschr. 1 (1850), Nr. 14, p. 65.

165) Manual of scientific inquiry der britischen Admiralität (mir nicht zugänglich).

166) Stockh. Oefv. 32^9 (1875), p. 49; Ann. der Hydrogr. 3 (1875), p. 474.

167) Ann. der Hydrogr. 1899, p. 62.

168) J. inst. electr. engineers 25 (1896), p. 235 (für den Fall, dass von vorneherein bekannt ist, dass nur ungerade Obertöne auftreten). Vgl. [183]).

169) Werke 3, Nr. 28, p. 308. Die von *Gauss* gegebene Anweisung zur Zerlegung in Gruppen, für den Fall, dass n eine zusammengesetzte Zahl ist, scheint bei den Praktikern wenig bekannt zu sein und selten angewendet zu werden.

170) Sulla legge delle variazioni orarie del barometro, Modena 1820 [?] (auch Mem. Soc. Ital. 20 (1828), p. 198); mir nicht zugänglich.

171) Lehrbuch der math. und physik. Geographie, 2, Gött. 1830, § 168, p. 279.

172) Studien aus der höheren Physik, Wien 1856, § 8, p. 33.

173) Amer. J. of sci. (2) 35 (1863), p. 25.

174) Edinb. Trans. 28 (1879), p. 751.

175) Genève arch. (3) 1 (1879), p. 151.

176) Hamburg Seewarte Arch. 17^5 (1894), p. 5.

177) Zeitschr. Math. Phys. 48 (1902), p. 443.

178) J. de phys. (3) 8 (1899), p. 139.

179) Lond. Trans. 165 (1876), p. 419.

für $n = 30$ *Kunzek*[171]);
für $n = 32$ *P. A. Hansen*[185]), *G. D. E. Weyer*[186]);
für $n = 36$ *Gauss*[187]), *Dechevrens*[163]), *Runge*[177]), *Fritsche*[161]);
für $n = 40$ *L. Hermann*[188]);
für $n = 52$ *Fritsche*[161]);
für $n = 64$ *Hansen*[189]);
für $n = 72$ *Strachey*[190]);
für $n = 73$ *Strachey*[191]), *Fritsche*[161]);
für $n = 4m$ allgemein *Bruns*[192]).

Will man nur wenige Koeffizienten berechnen, so kann man, wie *W. Ferrel*[193]) bemerkt, auch Gleichungen zu ihrer Bestimmung be-

179a) U. S. coast survey rep. f. 1878, app. 11, Nr. 16, p. 16.

180) Ann. Phys. Chem. N. F. 27 (1886), p. 107; vgl. aber die Berichtigungen von *H. Pipping*, Zeitschr. Biol. 27 (1893), p. 8 und Fenn. Acta 20^{11} (1895), p. 18.

181) Die Bewegung der Wärme [15]), Nr. 10, p. 37.

182) Lond. Roy. Proc. 42 (1887), p. 61, 75; Hourly readings from the self-recording instruments at the 4 observatories under the meteorol. council, Lond. 1887, appendix.

183) J. inst. electr. engineers 25 (1896), p. 234. *Wedmore* bedient sich nicht der Formeln von Nr. 4, sondern eines Verfahrens, das auf demselben Gedanken beruht, wie die in Nr. 22 besprochenen Methoden: ist n eine zusammengesetzte Zahl, $= rs$, und bildet man die Summen

$$\sum_{\varrho=0}^{r-1} y_{\sigma+\varrho s}, \qquad \sigma = 0, 1, 2, \ldots, s-1,$$

so fallen aus diesen Summen alle Komponenten heraus, deren Ordnungszahl nicht durch s teilbar ist. Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes erhält man den Gang der einzelnen Komponenten getrennt; die Amplitude einer jeden berechnet *Wedmore* aus dem Mittelwert der absoluten Beträge ihren Ordinaten, die Phasenkonstante dann einfach aus einer einzelnen Ordinate. Das Verfahren setzt voraus, dass man beträchtlich mehr Beobachtungen zur Verfügung hat, als Komponenten merklich sind; ist das der Fall und ist andererseits die Zahl der Beobachtungen nicht so gross, dass das Verfahren von *Tschebyscheff* (Nr. 6) in Frage kommen kann, so ist es allen andern vorzuziehen.

184) Meteor. Zeitschr. 36 (1901), p. 81.

185) Über die gegenseitigen Störungen des Jupiters und Saturns, Preisschr. Berlin 1831, Nr. 13, p. 49. 186) Ann. der Hydrogr. 16 (1888), p. 91.

187) Werke 3, Nr. 41, p. 325. Vgl. [169]).

188) Arch. Physiol. 47 (1890), p. 44.

189) Astr. Nachr. 12 (1835), Nr. 47, col. 339; Par. C. R. Suppl. 1, 1856 (Pariser Preisschrift von 1846), Nr. 67, p. 238; Nr. 75, p. 254.

190) Lond. Roy. Proc. 42 (1887), Nr. 9, p. 72.

191) ib. und Hourly readings [182]), app. p. [4].

192) Grundlinien [15]), § 86, p. 119.

193) U. S. coast survey, separater Appendix zum Report f. 1874, Nr. 161, p. 159. Die Methode von *Wedmore* [183]) beruht auf einem ähnlichen Gedanken.

kommen, wenn man nicht über die ganze Periode, sondern von verschiedenen Anfangspunkten aus nur über ihre Hälfte summiert.

Die Frage, wie gross man n zu nehmen hat, um in einem gegebenen Fall eine bestimmte Genauigkeit zu erreichen, lässt sich mathematisch nur beantworten, wenn ein anderweitiger analytischer Ausdruck der interpolatorisch darzustellenden Funktion vorliegt. Für diesen Fall ist sie schon von *Hansen*[194]) gestreift, dann von *Cauchy*[195]) und seinen Kommentatoren *Berger*[196]), *Puiseux*[197]), *Tisserand*[198]), neuerdings noch von *C. V. L. Charlier*[199]) und *C. A. Schultz-Steinthal*[200]) behandelt worden.

Anweisungen zur Kontrolle der Rechnung finden sich bei *Hansen*[201]) und bei *Fritsche*[161]).

Formeln zur zweckmässigen Berechnung einzelner Funktionswerte mit Hülfe der abgeleiteten Interpolationsformeln giebt allgemein *K. Weihrauch*[202]); für die beobachteten Argumente *R. Harris*[203]); für diese und für bestimmte zwischen ihnen gelegene *Dechevrens*[204]); für den speziellen Fall der „Interpolation in die Mitte“ *G. D. E. Weyer*[205]) und *R. Radau*[206]).

27. Graphische Methoden, Tabellen, Schablonen. Graphische Methoden für die Auswertung der Koeffizienten trigonometrischer Entwicklungen finden sich bei *Kirsch*[207]) und bei *Schreiber*[208]); bei ersterem auch für die Berechnung der Funktionswerte mit Hülfe der Formel. Auch das Verfahren von *Wedmore*[183]) ist ursprünglich graphisch gedacht. Aber auch die Integralformeln (17) lassen sich graphisch bewältigen: trägt man die Kurve $y = f(t)$ so auf einem Cylinder vom Radius $1/m$ auf, dass sie m-mal um ihn herumläuft, so geben, wie

194) Berl. Preisschr. [185]), p. 862.

195) 5. Note zum Bericht über *Le Verrier,* Par. C. R. 20 (1845), p. 8 (Oeuvres (1) 9, p. 148).

196) Thèse Toulouse 1863, § 7, p. 47.

197) Par. Observ. mém. 7 (1863), Nr. 10, p. 183.

198) Traité de mécanique céleste 4 (1896), Nr. 132, p. 294.

199) Stockh. Handl. 22^2 (1887), Nr. 23, p. 40.

200) Stockh. Öfv. 56 (1899), p. 273.

201) Preisschrift [185]), p. 58.

202) Dorp. Schriften 5 (1890), III 2, p. 13.

203) U. S. coast survey report f. 1897, App. 9, Nr. 71, p. 565.

204) Linc. Pontif. mem. 16 (1899), § 5, p. 157; Tafeln p. 168; Erläuterungen ib. 17 (1900), p. 16 des S.-A.

205) Astr. Nachr. 117 (1887), col. 312.

206) Bull. astron. 4 (1887), p. 492, 515.

207) Die Bewegung ... [15]), Nr. 8, p. 29.

208) Leop. N. A. 58 (1892), p. 211.

W. K. Clifford[209]) bemerkt, die Flächen ihrer Projektionen auf die tz- und die ty-Ebene die π-fachen Werte dieser Koeffizienten.

Andererseits werden die Rechnungen erleichtert durch eine Tabelle der Vielfachen der immer wieder vorkommenden trigonometrischen Funktionen. Für $n = 24$ hat eine solche *Fr. Kämtz* berechnet[210]).

Eine andere Erleichterung der Rechnung wird durch Schablonen gewährt. Die auftretenden trigonometrischen Funktionen haben, abgesehen vom Vorzeichen, nur eine geringe Anzahl verschiedener Werte; trägt man die Produkte dieser Werte mit den Beobachtungen in ein rechteckiges Schema ein und legt auf dieses Schema eine Schablone, die nur die gerade in Betracht kommenden Produkte freilässt, die übrigen verdeckt, so hat man nur noch zu addieren und zu subtrahieren. Solche Schablonen hat für $n = 40$ *L. Hermann*[211]) konstruieren lassen. Auf derselben Idee beruht der „Interpolateur à cadran" von *M. Dechevrens*[212]); er besteht aus zwei gegen einander beweglichen Kreisen, von denen der eine die Ordnungszahlen der Beobachtungen, der andere die trigonometrischen Multiplikatoren trägt.

28. Instrumentelle Hülfsmittel zum Rechnen mit den Formeln. Einen Rechenschieber zur Berechnung von R und ξ aus $R\cos\xi$ und $R\sin\xi$ hat *R. Strachey*[213]) konstruiert. Einen Apparat zur Zusammensetzung von harmonischen Komponenten verschiedener Periode giebt schon *Bashforth*[214]) an; er stellt dabei die beiden Veränderlichen durch

---

209) Lond. Math. Proc. 5 (1873), p. 11 (Papers, p. 201); *J. Perry* (Phil. Mag. (5) 38 (1894), p. 128; Auszug Nature 49 (1893/94), p. 617; vgl. auch *Perry* und *Hunt,* Phil. Mag. (5) 40 (1895), p. 506) und *S. Finsterwalder* (Zeitschr. Math. Phys. 43 (1898), p. 85) vermeiden das Zeichnen auf einem Cylinder durch Benutzung der Methoden der darstellenden Geometrie.

210) Repert. Meteorol. 1 (1860), p. 107 mit Gebrauchsanweisung; die Tafel allein auch in der von *Kämtz* vorbereiteten, von *A. v. Öttingen* herausgegebenen Tafelsammlung, Dorpat 1868, als Tafel IV, p. 35, sowie in *Jelinek*'s Anleitung zur Ausführung meteorologischer Beobachtungen, 2, 4. Aufl. Leipzig 1895, Anhang; auf vier Stellen hourly readings [182]), p. [33].

211) Arch. Physiol. 47 (1890), p. 44; 86 (1901), p. 100.

212) Linc. Pontif. mem. 16 (1899), p. 148.

213) Katalog mathematischer Modelle, herausg. von *W. Dyck,* München 1892, p. 144; Beschreibung, Abbildung und Gebrauchsanweisung Lond. Trans. 184 A, 1893, p. 619, sowie Harmonic analysis of hourly observations, publ. by ... the meteorol. council, London 1891, p. IV.

214) Brit. ass. rep. f. 1845, p. 3; die nach Angabe von *H. S. Hele-Shaw,* ib 1892, p. 415, 1822[?] in Cambridge erschienene ausführlichere Beschreibung war mir nicht zugänglich. *Bashforth* hatte hauptsächlich eine Verwendung des Apparats zur Auflösung algebraischer Gleichungen im Auge. Weiter ausgeführt sind *Bashforth*'s Ideen von *W. H. L. Russell,* Lond. Roy. Proc. 18 (1896/70), p. 72.

Polarkoordinaten dar. In rechtwinkligen Koordinaten leistet dasselbe der Apparat von *A. E. Donkin*[215]), die einzelnen Komponenteu zeichnet der von *R. Strachey*[216]).

Die Zusammensetzung beliebiger (auch unharmonischer) Komponenten von gegebener Periode, Amplitude und Phasenkonstante besorgt *W. Thomson*'s „tide-predicter“[217]). Er besteht aus einer Anzahl Rollen, deren Centra die vorgeschriebenen harmonischen Bewegungen ausführen; um die sämtlichen Rollen ist ein Faden gelegt, der an seinem andern Ende ein Gewicht trägt; die Bewegungen dieses Gewichtes stellen die Summen der einzelnen Bewegungen der Rollen dar. *W. Ferrel*[218]) hat den Apparat so umgeändert, dass er direkt die Extrema der resultierenden Bewegung giebt, indem er sich der Umformung (66) bedient und den Moment beobachtet, in welchem ein die Variabele repräsentierender Zeiger seine Nulllage passiert. Eine dritte Abänderung von *R. Harris*[219]) soll den von *Thomson* und den von *Ferrel* verfolgten Zweck zugleich erreichen. In dem Apparat von *A. A. Michelson* und *S. W. Stratton*[220]) werden die einzelnen komponierenden Bewegungen durch Gestänge, in denen die Länge je eines Gliedes abgeändert werden kann, mit vorgeschriebenen Amplituden auf Federn übertragen, diese greifen sämtlich an einem Hebel an, an dem andererseits eine grosse Feder als Gegenkraft wirkt.

29. Harmonische Analysatoren (vgl. auch II A 2, Nr. **60**, *Voss*). Die erste Idee zu einem harmonischen Analysator, d. h. zu einem Instrument zur mechanischen Auswertung der Koeffizienten der trigonometrischen Entwicklung einer graphisch gegebenen Funktion, rührt von *J. Amsler*[221]) her; doch scheint sie damals nicht ausgeführt wor-

215) Lond. Roy. Proc. 22 (1874), p. 196; Auszug Brit. ass. rep. f. 1873, p. 45 (nur für zwei Komponenten).

216) Katalog [213]), p. 136, 213. Ich habe keine ausführlichere Beschreibung gesehen.

217) *W. Thomson* u. *P. G. Tait*, Treatise on natural philosophy 1, App. B' 1, p. 479 (zuerst in der Ausgabe von 1879; vgl. auch Nr. 58, p. 40). Proc. inst. civil engineers war mir nicht zugänglich.

218) U. S. coast survey report f. 1883, App. 10, p. 253.

219) ib. f. 1894, Nr. 59, p. 181. Die für später versprochene Beschreibung der fertigen Maschine habe ich nicht gesehen. Nr. 61, p. 183 und Nr. 66, p. 186 giebt *Harris* an, wie man mit einfacheren Mitteln dasselbe erreichen könne, wenn man auf grosse Genauigkeit verzichte.

220) Amer. J. of sci. (4) 5 (1898), p. 1; fast ganz derselbe Text, aber zum Teil andere Figuren Phil. Mag. (5) 45 (1898), p. 85.

221) Zürich Vierteljahrschr. 1 (1856), Nr. 21, p. 107 (auch sep. Schaffhausen 1856).

den zu sein. *Amsler* führt ein Planimeterrädchen so, dass seine Axe mit einer festen Richtung in jedem Augenblick einen Winkel einschliesst, der zur Abscisse proportional ist. *W. Thomson*[222]), der der Genauigkeit der Planimeterrädchen — wohl mit Unrecht — misstraute, benutzt die von *J. Thomson* erfundene Übertragung der Bewegung von einer Scheibe auf einen Cylinder durch Vermittlung einer beide berührenden Kugel; ist der Berührungspunkt zwischen Scheibe und Kugel vom Scheibenmittelpunkt um $\varphi(x)$ entfernt und dreht sich die Scheibe um einen Winkel $\psi(x)\,dx$, so dreht sich der Cylinder um einen Winkel $\varphi(x)\psi(x)\,dx$. Ist $\varphi(x) = \cos nx$ oder $\sin nx$, so kann die erforderliche Bewegung der Scheibe durch einen Kurbelmechanismus erzielt werden. Bei dem Apparat von *A. Sommerfeld* und *E. Wiechert*[223]) wird die Kurve $y = f(x)$ [wie bei *Clifford*[209])] auf einem Cylinder („Walze") aufgezeichnet, und zwar mit Hülfe des hierfür besonders eingerichteten Apparates selbst. Diese Walze dreht sich sowohl um ihre eigene Axe, als auch, und zwar mit n-facher Winkelgeschwindigkeit, um eine vertikale Axe, so dass der Berührungspunkt einer festen Tangentialebene der Walze mit der aufgezeichneten Kurve von einer festen Gerade dieser Ebene in jedem Augenblick den Abstand $y = \cos nx$ hat. Die so entstehende Kurve kann planimetriert werden, ohne dass sie gezeichnet zu werden braucht. Auf der Idee von *Clifford*[209]) beruht auch der erste harmonische Analysator von *O. Henrici*[224]). Später zieht *Henrici* noch die Umformung:

$$\int_{-\pi}^{\pi} y \cos nx\,dx = \frac{1}{n}\int \sin nx\,dy \tag{110}$$

herbei; es kommt also nur darauf an, ein Planimeterrädchen längs der Kurve $y = f(x)$ so zu führen, dass seine Ebene immer einen Winkel nx mit der y-Axe einschliesst. Das wird erreicht, indem die Bewegung des Cylinders durch Reibungsräder auf eine Axe übertragen wird, die wie bei *Amsler* die Planimeterrädchen trägt[225]). Dieser zweite Ent-

222) Erste Mitteilung Lond. Roy. Proc. 24 (1876), p. 266; arbeitsfähiges Modell Lond. Roy. Proc. 27 (1878), p. 371 (Treatise 1, App. B' VII, p. 505; Beschreibung und Abbildung der ausgeführten Maschine Engineering 30 (1880), p. 561, sowie in einem Bericht von *R. H. Scott* und *H. Curtis* über mit ihr erzielte Resultate, Lond. Roy. Proc. 40 (1886), p. 382.

223) Königsberg Schriften 32 (1891), p. 28; Kat.[213]), p. 214.

224) Phil. Mag. (5) 38 (1894), p. 113; Auszüge Gött. Nachr. 1894, p. 30; Nature 49 (1893/94), p. 521; vgl. auch Kat.[213]), p. 129. *J. Perry,* Phil. Mag. (5) 38 (1894), p. 128 hat von diesem ersten Instrument *Henrici*'s eine bessere Meinung als *Henrici* selbst.

225) Phil. Mag. (5) 38 (1894), p. 115; Kat.[213]), p. 131, 213.

wurf *Henrici*'s ist von *A. Sharp*[226]) weiter durchgeführt und von *G. Coradi*[227]) ausgeführt worden. *Sharp* schlägt auch noch eine Modifikation dieses Instruments vor, die direkt Amplitude und Phasenkonstante jeder einzelnen Komponente giebt[228]).

Vor- und Nachteile der bis jetzt genannten Apparate stellt *Henrici*[229]) einander gegenüber.

Ein Apparat von *G. U. Yule*[230]) benutzt einen Kreis, der sich so bewegt, dass sein Mittelpunkt auf $y = f(x)$ bleibt und dass er ohne zu gleiten auf einer Geraden parallel der x-Axe rollt, die sich nur in Richtung der y-Axe bewegen kann.

Soll der Apparat von *Michelson* und *Stratton*[220]) als harmonischer Analysator dienen, so muss bei ihm die Amplitude der n^{ten} Komponente gleich dem Wert der zu analysierenden Funktion für das n^{te} Argument genommen werden; er giebt dann den μ^{ten} Koeffizienten der Summenformel (12) als stetige Funktion von μ.

30. Hülfsmittel zur Trennung verschiedener Perioden und zur Aufsuchung versteckter Periodizitäten. Zur Ausführung von Rechnungen der unter Nr. 22 besprochenen Art hat sich schon *Buys-Ballot*[231]) eines Systems cylindrischer Scheiben bedient, die auf eine gemeinsame Axe aufgesteckt und beliebig gegen einander gedreht werden konnten. Auf einem ähnlichen Gedanken scheint die „Periodenrechenmaschine“ von *E. Lamprecht*[232]) zu beruhen. *G. H. Darwin*[233]) hat die Idee einer maschinellen Einrichtung als zu kostspielig wieder fallen lassen und sich mit einer Einrichtung zur Ersparung des wiederholten Abschreibens der Beobachtungen begnügt. Vollständiger wird dieser letztere Zweck erreicht durch die von *Börgen*[234]) und von

226) Kat. [213]), p. 134 und Nachtrag, 1894, p. 35; Nature 49 (1893/94), p. 521; vgl. auch *Henrici*, Phil. Mag. (5) 38 (1894), § 5, p. 115.

227) Der harmonische Analysator, Zürich 1894. Das Absolutglied muss bei diesen Instrumenten besonders mittelst eines gewöhnlichen Planimeters bestimmt werden. Die Übertragung auf die Registrierrädchen geschieht bei *Coradi* nach einem von *M. Küntzel* zu anderen Zwecken gemachten Vorschlag durch eine gläserne Kugel. Ausführliche Diskussion der Fehlerquellen des Apparates bei *L. Grabowski* (auf Anregung von *H. Seeliger*), Wien. Ber. 110^{2a} (1901), p. 717. *Bervy*, Mosk. Observ. Ann. 1896 war mir nicht zugänglich. Vgl. die Figur am Schluss des Artikels.

228) Phil. Mag. (5) 38 (1884), p. 121; Nature 49 (1893/94), p. 617.

229) Kat. [213]), p. 222.

230) Phil. Mag. (5) 39 (1895), p. 367.

231) Ann. Phys. Chem. 84 (1851), p. 538.

232) Progr. Bautzen 1897, p. 27; leider ohne Abbildung oder detaillierte Beschreibung.

233) Lond. Roy. Proc. 52 (1892), p. 345.

234) bei *Darwin*, ib. p. 350.

L. P. Shidy[235]) vorgeschlagenen Schablonen („stencils"). Auch für die Summation der „*A*-Summen" nach „*B*-Stunden" giebt *F. M. Little*[236]) Schablonen an. *R. Harris*[237]) entwickelt die Idee einer Maschine, die die jedesmal erforderliche Anordnung der Beobachtungen und ihre Addition selbstthätig besorgen soll.

Der Apparat von *Michelson* und *Stratton*[220]) liesse sich jedenfalls so einrichten, dass er direkt das Periodogramm[155]) liefern würde.

Zur successiven Auffindung der Perioden verschiedener Komponenten ist auch das von *A. Sommerfeld*[238]) gegebene Verfahren bequem; nur ist zu beachten, dass es die Amplituden modifiziert.

---

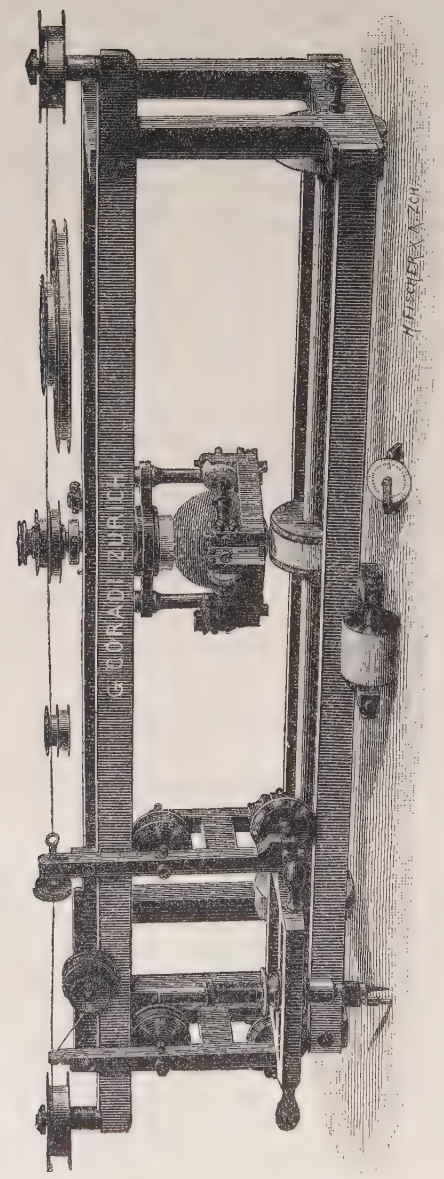
235) Bei *R. Harris*, U. S. coast survey report f. 1897, Nr. 53, p. 539.

236) ib. Nr. 66. p. 557.

237) ib. Nr. 55, p. 540.

238) *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Über die Theorie des Kreisels, Leipzig 1903, VIII, § 6, p. 679. In der dort gegebenen Anwendung auf die Polschwankungen ist der Vergrösserungsfaktor für die in erster Linie in Betracht kommenden Perioden vermöge des speziellen Wertes ihres Verhältnisses nahezu gleich 1.

(Abgeschlossen im April 1904.)



Harmonischer Analysator.

II A 10. THEORIE DER KUGELFUNKTIONEN UND DER VERWANDTEN FUNKTIONEN, INSBESONDERE DER LAMÉ'SCHEN UND BESSEL'SCHEN

(THEORIE SPEZIELLER, DURCH LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DEFINIERTER FUNKTIONEN)

VON

A. WANGERIN

IN HALLE A. S.

Inhaltsübersicht.

I. Definition der allgemeinen Kugelfunktion.

1. Definition der allgemeinen Kugelfunktion mit zwei Veränderlichen.

II. Die einfache Kugelfunktion P^n.

2. Die einfache Kugelfunktion P^n einer Veränderlichen und ihre Differentialgleichung.
3. Verschiedene Reihen für P^n.
4. Darstellung von P^n als Differentialquotient; Wurzeln von $P^n = 0$.
5. Darstellung von P^n durch bestimmte Integrale.
6. Integralsätze, Entwicklung ganzer Potenzen nach Kugelfunktionen, Rekursionsformeln.
7. Verschiedene Ausgangspunkte der Theorie, Tafeln.

III. Zugeordnete Kugelfunktionen.

8. Zugeordnete Kugelfunktionen; ihre Differentialgleichung, verschiedene Darstellungen.
9. Integralsätze der Zugeordneten.
10. *F. Neumann*'s Definition dieser Funktionen.

IV. Darstellung der allgemeinen Kugelfunktion.

11. Darstellung der allgemeinen Kugelfunktion zweier Veränderlichen durch Zugeordnete.
12. Darstellung von Y_n bei *Maxwell* und *Thomson* und *Tait*.
13. Das Additionstheorem der einfachen Kugelfunktionen.
14. Integralsätze der allgemeinen Kugelfunktionen.
15. Entwicklung einer Funktion zweier Variabeln nach Kugelfunktionen.

16. Beweis für die Gültigkeit der Entwicklung nach *Dini* und *Heine*.
17. Andere Beweise.
18. *F. Neumann*'s Entwicklung nach Kugelfunktionen auf Grund gegebener Beobachtungen.

V. Die Kugelfunktionen zweiter Art.

19. Die Kugelfunktion zweiter Art Q^n.
20. Das *F. Neumann*'sche Integral für Q^n.
21. Entwicklung von Q^n nach steigenden Potenzen.
22. Integraldarstellung von Q^n.
23. Zusammenhang zwischen Kugelfunktionen und Kettenbrüchen.
24. Zugeordnete Funktionen der zweiten Art.
25. Zugeordnete, deren Nebenindex den Hauptindex übersteigt.

VI. Erweiterungen.

26. Kugelfunktionen, deren Index eine beliebige Zahl ist.
27. Ringfunktionen.
28. *Mehler*'s Kegelfunktionen.
29. Adjungierte Kegelfunktionen.
30. Entwicklung einer Funktion nach Kegelfunktionen.
31. Funktionen, die aus der Entwicklung von $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\nu}$ entstehen.
32. Fall, in dem ν ein Vielfaches von $\frac{1}{2}$ ist. Kugelfunktionen höherer Ordnung.

VII. Lamé'sche Funktionen.

33. Definition. *Lamé*'sche Differentialgleichung.
34. Darstellung der vier Klassen von *Lamé*'schen Funktionen erster Art.
35. Die zugeordneten Kugelfunktionen als Grenzfälle der *Lamé*'schen Funktionen. Additionstheorem.
36. Wurzeln der Gleichung $E(\lambda) = 0$.
37. Entwicklung einer Funktion nach *Lamé*'schen Produkten.
38. Die *Lamé*'schen Funktionen zweiter Art.
39. Hinweis auf *Hermite*'s Untersuchungen betreffs der *Lamé*'schen Gleichung.
40. *Lamé*'sche Funktionen höherer Ordnung.
41. Erweiterung des Begriffs der *Lamé*'schen Funktionen.
42. Die *Lamé*'schen Funktionen mit mehr als drei singulären Punkten im Endlichen.
43. Funktionen des elliptischen Kegels.

VIII. Cylinderfunktionen oder Bessel'sche Funktionen.

44. Differentialgleichung. Reihen und Integrale für die Funktionen erster Art.
45. *Bessel*'sche Funktionen zweiter Art.
46. Ableitung dieser Funktionen aus denen erster Art durch einen Grenzübergang.
47. Die Cylinderfunktionen als Grenzen der Kugelfunktionen.
48. Integraldarstellungen der Funktionen zweiter Art.
49. Semikonvergente Reihen.
50. Rekurrente Relationen.
51. Zusammenhang mit Kettenbrüchen.
52. Wurzeln der Gleichung $J_\nu(z) = 0$.
53. Additionstheorem der Funktionen erster und zweiter Art.
54. *C. Neumann*'s Funktion O_n.

55. Entwicklung einer analytischen Funktion nach *Bessel'*schen Funktionen.
56. Hinweis auf andere Reihen sowie auf Entwicklungen nach Quadraten und Produkten der Cylinderfunktionen.
57. Die für die Aufgaben der Physik erforderlichen Entwicklungen.
58. Die Reihe von *Schlömilch*.
59. *C. Neumann's* Integraldarstellung einer Funktion mittelst *Bessel'*scher Funktionen.
60. Bestimmte Integrale mit *Bessel'*schen Funktionen.
61. Tafeln.

IX. Funktionen des elliptischen und parabolischen Cylinders.

62. Funktionen des elliptischen Cylinders.
63. Funktionen des parabolischen Cylinders.

Litteratur.

Lehrbücher.

Georg Sidler, Die Theorie der Kugelfunktionen, Bern 1861, 71 S. 4°.

E. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, 1. Aufl. Berlin 1861, 382 S. 2. Aufl. Band I, Theorie der Kugelfunktionen, Berlin 1878, 484 S.; Band II, Anwendungen der Kugelfunktionen, Berlin 1881, 380 S.

Das Handbuch ist das vollständigste und inhaltreichste aller vorhandenen Lehrbücher über Kugel- und verwandte Funktionen. Es wird im Folgenden als *Heine*, H. B. 1, resp. 2 citiert werden, und zwar beziehen sich die Citate auf die zweite Auflage.

J. Todhunter, An elementary treatise on *Laplace's* functions, *Lamé's* functions, and *Bessel's* functions, London 1875, 348 S.

N. M. Ferrers, An elementary treatise on spherical harmonics and subjects connected with them, London 1877, 2. Aufl. 1881.

F. Neumann, Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen, herausgegeben von *C. Neumann*, Leipzig 1887. — Über Kugelfunktionen speziell handeln die Kapitel 2—4, 7, 13.

W. E. Byerly, An elementary treatise on *Fourier's* series and spherical, cylindrical, and ellipsoidal harmonics with applications to problems in mathematical physics, Boston 1893, 287 S.

A. Gray and *G. B. Mathews*, A treatise on *Bessel's* functions and its applications to physics, London 1895, 292 S.

Joh. Frischauf, Vorlesungen über Kreis- und Kugelfunktionenreihen, Leipzig 1897, 60 S.

J. H. Graf und *Ed. Gubler,* Einleitung in die Theorie der *Bessel*'schen Funktionen, Heft 1, Bern 1898, 142 S.; Heft 2, Bern 1900, 156 S.

N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen, Leipzig 1904, 408 S.

Dies Handbuch ist das ausführlichste aller vorhandenen Lehrbücher über Cylinderfunktionen.

Die hauptsächlichsten Eigenschaften der Kugelfunktionen sind auch in folgenden Werken behandelt:

R. Murphy, Elementary principles of the theories of electricity, heat and molecular actions. Part I, On electricity, Cambridge 1833.

In diesem Werke, von dem nur der erste Teil erschienen ist, findet sich der erste Abriss der Theorie der Kugelfunktionen.

G. Lamé, Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et les surfaces isothermes, Paris 1857. Vorlesung 15—20 behandeln auch die *Lamé*'schen Funktionen.

J. H. Pratt, A treatise on attraction, *Laplace*'s functions and the figure of the earth, 3. ed. Cambridge u. London 1865, 4. ed. 1871.

W. Thomson und *P. G. Tait*, Handbuch der theoretischen Physik, deutsch von *H. Helmholtz* und *G. Wertheim*, Band I (1871), Kap. 1, Zusatz B; Band II (1874), § 782 ff. Noch ausführlicher sind die Kugelfunktionen in der zweiten englischen Ausgabe des Werks, Cambridge 1879, behandelt.

Citiert werden soll im Folgenden die deutsche Ausgabe als *Thomson* und *Tait*, Th. Ph.

Maxwell, A treatise on Electricity and Magnetism, Oxford 1873; 2. Aufl. 1881 von *W. D. Niven.* Deutsche Übersetzung von *B. Weinstein,* Berlin 1882 u. 1883. Über Kugelfunktionen handelt Teil I, Kap. IX [citiert als *Maxwell,* Electr.].

P. Lejeune-Dirichlet, Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte, herausgegeben von *Grube,* Leipzig 1876; 2. Aufl. 1887, Abschnitt IV.

H. Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, nach *Riemann*'s Vorlesungen, 2 Bde., Braunschweig 1900—1901, 506 u. 527 S. — Über *Bessel*'sche Funktionen und Kugelfunktionen handeln die Abschnitte 8 und 13 von Bd. I.

R. Fricke, Kurzgefasste Vorlesungen über verschiedene Gebiete der höheren Mathematik mit Berücksichtigung der Anwendungen, Leipzig 1900, Kap. 2.

Anwendungen der Kugel- und Cylinderfunktionen findet man ferner in *Rayleigh,* Die Theorie des Schalles, 2 Bände, deutsch von *Fr. Neesen,* Braunschweig 1879, 1880. Eine zweite englische Auflage des Buches ist 1894—1896 erschienen.

Monographieen.

G. Bauer, Von den Integralen gewisser Differentialgleichungen, welche in der Theorie der Anziehung vorkommen, Habilitationsschrift München 1857.

C. Neumann, Über die Entwickelung einer Funktion mit imaginärem Argument nach den Kugelfunktionen erster und zweiter Art, Halle 1862.

C. Neumann, Theorie der Elektrizitäts- und Wärmeverteilung in einem Ringe, Halle 1864, 51 S.

C. Neumann, Theorie der *Bessel*'schen Funktionen, Leipzig 1867, 72 S, [citiert als *C. Neumann*, Bess. F.]

E. Lommel, Studien über die *Bessel*'schen Funktionen, Leipzig 1868, 135 S. [citiert als *Lommel*, Studien].

F. Neumann, Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen, Leipzig 1878, 156 S. 4° [citiert als *F. Neumann,* Beiträge].

C. Neumann, Über die nach Kreis-, Kugel- und Cylinderfunktionen fortschreitenden Entwickelungen, Leipzig 1881, 140 S., 4° [citiert als *C. Neumann*, Entwickelungen].

L. Schläfli, Über die zwei *Heine*'schen Kugelfunktionen mit beliebigem Parameter und ihre ausnahmslose Darstellung durch bestimmte Integrale. Universitäts-Festschrift, Bern 1881, 66 S., 4° [citiert als *Schläfli*, Kugelff. m. bel. Par.].

J. Nicolas, Étude des fonctions de *Fourier* (première et deuxième espèce), Thèse Paris 1882, abgedruckt in Ann. éc. norm. (2) 11 (1882), p. 3—90.

E. Häntzschel, Studien über die Reduktion der Potentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen, Berlin 1893, 180 S.

M. Bôcher, Über die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie. Mit einem Vorwort von *F. Klein,* Leipzig, 1894, 258 S.

Eine Zusammenstellung der Hauptsätze über *Bessel*'sche Funktionen, namentlich der für die Anwendungen auf Physik wichtigen, findet man bei *J. W. Strutt* [Lord *Rayleigh*], Phil. Mag. (4) 44 (1872), p. 328—344.

I. Definition der allgemeinen Kugelfunktion.

1. Definition der allgemeinen Kugelfunktion mit zwei Veränderlichen. Die Theorie der Kugelfunktionen einer Veränderlichen, der einfachen Kugelfunktionen, ist von *A. M. Legendre* begründet[1]); und zwar wurde er auf diese Funktionen durch die Aufgabe geführt, die (in Polarkoordinaten ausgedrückte) reziproke Entfernung zweier Punkte in eine Reihe zu entwickeln. Dagegen sind die Kugelfunktionen mit zwei Veränderlichen, die allgemeinen Kugelfunktionen, zuerst von *P. S. de Laplace* untersucht[2]). Der Name „Kugelfunktionen" endlich rührt von *C. Fr. Gauss* her[3]). Da die zuerst genannten Funktionen nur einen Spezialfall der *Laplace*'schen Funktionen darstellen, so stellen wir die Definition der letzteren voran.

Am einfachsten definiert man die *allgemeine Kugelfunktion* mit *E. Beltrami*[4]) als eine solche homogene Funktion n^{ter} Ordnung der drei Richtungskosinus ξ, η, ζ, die, falls man ξ, η, ζ als von einander unabhängig ansieht, der *Laplace*'chen Gleichung

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2} = 0$$

genügt; n ist dabei eine positive ganze Zahl. Drückt man die Richtungskosinus durch zwei unabhängige Variable ξ, ω aus:

1) *Legendre,* Sur l'attraction des sphéroides; Mém. prés. à l'Acad. par divers savans, 10, Paris 1785. — Über die Priorität von *Legendre* gegenüber *Laplace,* vgl. *Heine,* H. B. 1, p. 2. — Ausser in der Einleitung zu *Heine*'s Handbuch finden sich historische Angaben bei *J. Todhunter,* A history of the mathematical theories of attraction and the figure of the earth, from the times of *Newton* to that of *Laplace,* 2 Bde., London 1873.

2) *Laplace,* Théorie des attractions des sphéroides et de la figure des planètes, Mém. de l'Acad. Année 1782, Paris 1785; vgl. auch Mécan. cél. 2 und 5.

3) Götting. Gelehrte Anzeigen 1828; vgl. *Gauss*' Werke, 6, p. 648.

4) *E. Beltrami,* Sur la théorie des fonctions sphériques, Par. C. R. 116 (1893), p. 181. — Vgl. auch *M. Hamburger,* Arch. Math. Phys. (3) 2 (1901), p. 43—48.

$$\xi = \cos\omega\sqrt{1-\zeta^2},\quad \eta = \sin\omega\sqrt{1-\zeta^2},$$

so ergiebt sich für eine *beliebige* Funktion φ aus den Beziehungen zwischen ihren Ableitungen nach ζ, ω einerseits und nach ξ, η, ζ andererseits die Gleichung:

$$\text{(a)}\qquad \Delta\varphi - F(\varphi) - F[F(\varphi)] = \frac{\partial(1-\zeta^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}}{\partial\zeta} + \frac{1}{1-\zeta^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2},$$

wobei

$$F(\varphi) = \xi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \eta\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + \zeta\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}$$

ist. Hat nun φ die durch die obige Definition geforderte Eigenschaft, so geht die linke Seite von (a) in $-n(n+1)\varphi$ über, und man erhält für die *allgemeine Kugelfunktion* n^{ter} Ordnung die Differentialgleichung:

$$\text{(1)}\qquad \frac{\partial(1-\zeta^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}}{\partial\zeta} + \frac{1}{1-\zeta^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2} + n(n+1)\varphi = 0$$

oder, wenn $\zeta = \cos\vartheta$ gesetzt wird:

$$\text{(1a)}\qquad \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\sin\vartheta\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2} + n(n+1)\varphi = 0.$$

Gewöhnlich bezeichnet man die allgemeine Kugelfunktion, die auch *Laplace*'sche Funktion genannt wird, mit $Y_n(\vartheta, \omega)$. Übrigens lehrt die Gleichung (a), dass der Ausdruck rechter Hand eine Differentialinvariante der Richtung ist, da die linke Seite dieser Gleichung beim Übergange zu einem andern rechtwinkligen System ungeändert bleibt.

Nimmt man in der obigen Definition an Stelle der Richtungskosinus ξ, η, ζ die Koordinaten eines beliebigen Raumpunktes, so erhält man die „räumliche harmonische Kugelfunktion" (solid harmonic) von *Thomson* und *Tait*[5]); dieselbe ist, wenn r den Abstand des betrachteten Punktes vom Anfangspunkte bezeichnet,

$$r^n Y_n(\vartheta, \omega),\ \text{resp.}\ \frac{1}{r^{n+1}} Y_n(\vartheta, \omega),$$

je nachdem man n oder $-(n+1)$ als die Ordnung der Funktion ansieht. $Y_n(\vartheta, \omega)$ selbst heisst bei *Thomson* und *Tait* „harmonische Kugelflächenfunktion" (spherical surface harmonic).

II. Die einfache Kugelfunktion P^n.

2. Die einfache Kugelfunktion P^n einer Veränderlichen und ihre Differentialgleichung. Ehe wir zur analytischen Darstellung von

5) Vgl. *Thomson* und *Tait*, Th. Ph. 1, p. 156 ff.

Y_n gehen, betrachten wir den Fall, dass die Kugelfunktion von ω unabhängig ist. Soll φ ausser von ζ nur von $\lambda = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ abhängen, so ist

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}.$$

Es handelt sich also darum, diejenige homogene ganze Funktion von ζ und λ zu suchen, die der Gleichung

$$\text{(b)} \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} = 0$$

genügt. Eine solche Funktion aber enthält ausser ganzen Potenzen von ζ nur *gerade* Potenzen von λ. Setzt man weiter $\lambda = \sqrt{1 - \zeta^2}$, so enthält also die Funktion nur ganze Potenzen von ζ. Die Kugelfunktion n^{ter} Ordnung einer Veränderlichen ist somit diejenige *ganze* Funktion n^{ter} Ordnung von ζ, die der Gleichung (1) für den Fall genügt, dass φ von ω unabhängig ist, d. h. der Gleichung:

$$\text{(2)} \qquad \frac{d(1-\zeta^2)\frac{d\varphi}{d\zeta}}{d\zeta} + n(n+1)\varphi = 0$$

oder für $\zeta = \cos\vartheta$:

$$\text{(2a)} \qquad \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{d \sin\vartheta \frac{d\varphi}{d\vartheta}}{d\vartheta} + n(n+1)\varphi = 0.$$

Dass die Gleichung (2) ein partikuläres Integral besitzt, das eine ganze Funktion n^{ter} Ordnung von ζ ist, ergiebt sich auch direkt. Damit ist die einfache Kugelfunktion bis auf einen konstanten Faktor definiert. Eine zweckmässige Bestimmung dieses Faktors ergiebt sich daraus, dass, wenn man den Ausdruck

$$\text{(3)} \qquad \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha\zeta + \alpha^2}}$$

nach steigenden Potenzen von α entwickelt (eine Entwicklung, die für $|\alpha| < |1$, $|\zeta| \leqq |1$ sicher konvergiert), der Koeffizient von α^n ebenfalls der Gleichung (2) genügt. Die Kugelfunktion erster Art der Ordnung n mit einer Variabeln kann man daher mit *Legendre*[1]) als den Koeffizienten von α^n in der Entwicklung des Ausdrucks (3) definieren. Der Zusatz „erster Art" soll zur Unterscheidung von der später zu besprechenden Kugelfunktion zweiter Art dienen. Wo kein Zweifel entstehen kann, lässt man diesen Zusatz fort.

Es ist üblich, die eben definierte Funktion mit $P^{(n)}(\zeta)$ oder $P_n(\zeta)$ oder auch $X_n(\zeta)$ zu bezeichnen. Man nennt dieselbe auch „einfache Kugelfunktion", in England „zonale harmonische Funktion"

(zonal harmonic), oder „einaxige harmonische Funktion“[6]). Vielfach werden dafür auch die Namen „*Legendre*'sches Polynom“ oder „*Legendre*scher Koeffizient“ gebraucht.

3. Verschiedene Reihen für P^n. In expliciter Darstellung lautet die Kugelfunktion:

$$(4)\qquad P^n(\zeta) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdots n}\cdot\left\{\zeta^n - \frac{n(n-1)}{2\cdot(2n-1)}\zeta^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}\zeta^{n-4} - \cdots\right\}.$$

Für gerade n ist $P^n(\zeta)$ eine gerade, für ungerade n eine ungerade Funktion; speziell ist

$$P^0(\zeta) = 1,\quad P^1(\zeta) = \zeta,\quad P^2(\zeta) = \tfrac{3}{2}\zeta^2 - \tfrac{1}{2}\ \text{etc.};$$

ferner ist

$$P^n(1) = 1,\quad P^{2n}(0) = (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}.$$

Als homogene Funktion von $\zeta = \cos\vartheta$ und $\sqrt{1-\zeta^2} = \sin\vartheta$ geschrieben, lautet P^n:[7])

$$(4a)\qquad P^n(\cos\vartheta) = \cos^n\vartheta - \frac{n(n-1)}{2\cdot 2}\cos^{n-2}\vartheta\sin^2\vartheta + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4}\cos^{n-4}\vartheta\sin^4\vartheta - \cdots.$$

Von anderen Reihendarstellungen sei hier noch die folgende erwähnt, die sich schon bei *Legendre* und *Laplace* findet:

$$(4b)\qquad P^n(\cos\vartheta) = 2\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\cdot\left\{\cos(n\vartheta) + \frac{1\cdot n}{1\cdot(2n-1)}\cos(n-2)\vartheta + \frac{1\cdot 3\cdot n(n-1)}{1\cdot 2\cdot(2n-1)(2n-3)}\cos(n-4)\vartheta + \cdots\right\}.$$

(Die Reihe geht für ungerade n bis $\cos\vartheta$, für gerade n bis $\cos(0\cdot\vartheta)$, und dem Koeffizienten von $\cos(0\cdot\vartheta)$ ist der Faktor $\frac{1}{2}$ hinzuzufügen.) Aus (4b) folgt, dass 1 der grösste Wert ist, den $P^n(\cos\vartheta)$ für reelle ϑ annehmen kann.

Die Reihe (4a) lehrt, dass auch in der Reihe (4) die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von ζ, auf die kleinste Benennung gebracht, im Nenner nur Potenzen von 2 enthalten[8]).

Hinsichtlich anderer Entwicklungen von $P^n(\cos\vartheta)$, z. B. nach Potenzen von $\sin\frac{1}{2}\vartheta$ oder $\cos\frac{1}{2}\vartheta$ oder $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta$ sei auf *Heine*, H. B. 1,

6) *Thomson* und *Tait*, Th. Ph. 1, p. 175.

7) Vgl. *Maxwell*, Electr. 1, p. 164 der ersten englischen, p. 209 der deutschen Ausgabe.

8) Dieser Satz rührt von *G. Bauer* her, vgl. dessen Habilitationsschrift.

Kap. I verwiesen; dort findet man ferner verschiedene Darstellungen von $P^n(\xi)$ mittelst hypergeometrischer Reihen. Auch durch Determinanten lassen sich die Kugelfunktionen ausdrücken[9]).

Endlich ist zu bemerken, dass man, wenn man die Differentialgleichung (2) oder die Entwicklung des Ausdrucks (3) zu Grunde legt, die Beschränkung, wonach ξ den Kosinus eines reellen Winkels bezeichnet, fallen lassen und der Variablen ξ ohne weiteres beliebige reelle oder komplexe Werte beilegen kann. Ein beliebig veränderliches Argument von P^n soll im Folgenden mit x bezeichnet werden.

Bezeichnet x eine ungerade ganze Zahl, so ist $P^n(x)$ eine ungerade ganze Zahl, und sämtliche Differentialquotienten von $P^n(x)$ sowie $\int_1 P^n(x)dx$ sind ganze Zahlen[10]).

4. Darstellung von P^n als Differentialquotient; Wurzeln von $P^n = 0$. Wie zuerst *O. Rodrigues*, später unabhängig von ihm *J. Ivory* und *C. G. J. Jacobi*[11]) gefunden haben, ist

$$P^n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}. \tag{5}$$

Aus dieser Formel folgt, dass die Wurzeln der Gleichung $P^n(x) = 0$ sämtlich reell sind und zwischen -1 und $+1$ liegen; zugleich ergiebt sich aus der Differentialgleichung (2), dass alle Wurzeln von einander verschieden sind, und aus einer Bemerkung in Nr. **3**, dass die Wurzeln paarweise von gleichem absoluten Wert, aber entgegengesetztem Zeichen sind. Übrigens sind die Wurzeln über das Intervall $-1 < x < +1$ nahezu gleichförmig verteilt[12]).

Die Wurzeln der Gleichung $P^n(x) = 0$ spielen eine wichtige Rolle in der mechanischen Quadratur. Nimmt man nämlich bei der angenäherten Berechnung eines von $x = -1$ bis $x = +1$ erstreckten Integrals zu Abscissen, für welche die Ordinaten berechnet werden,

9) Vgl. *J. W. L. Glaisher*, Messenger (2) 6 (1876), p. 49 und *K. Heun*, Gött. Nachr. 1881, p. 104.

10) *G. Bauer*, Münch. Ber. 24 (1894), p. 343 ff. Der Satz folgt aus einer Reihe für $P^n(x)$, resp. für $\frac{P^n(x)}{x}$, die nach Potenzen von $(x^2 - 1)$ fortschreitet. — Vgl. *L. Gegenbauer*, Monatsh. f. Math. 7 (1896), p. 35.

11) *Rodrigues*, Corresp. sur l'école pol. 3 (1816), p. 361—385. — *Ivory*, Lond. Trans. 1824[1], p. 91—93. — *Jacobi*, J. f. Math. 2 (1827), p. 223—226; Ges. W. 6, p. 21—25. — Auch *Murphy*, Treatise, p. 7, will diese Darstellung unabhängig von *Jacobi* gefunden haben.

12) Betreffs der Verteilung der Wurzeln vgl. *H. Bruns*, J. f. Math. 90 (1881), p. 322—328.

die n Wurzeln von $P^n(x) = 0$, so erreicht man, wie zuerst *Gauss*[13]) gezeigt hat, denselben Grad der Näherung wie bei der Berechnung der doppelten Zahl von Ordinaten, deren Intervalle gleich gross sind.

Für den Fall, dass das Argument der Kugelfunktion zwischen -1 und $+1$ liegt, lässt sich die Kugelfunktion auch folgendermassen darstellen[14]): Sind x, y, z die Koordinaten eines Punktes, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\xi = \frac{z}{r}$, so ist

$$P^n(\xi) = (-1)^n \frac{r^{n+1}}{n!} \frac{\partial^n \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z^n}. \tag{6}$$

5. Darstellung von P^n durch bestimmte Integrale. Mittelst *bestimmter Integrale* lässt sich die Kugelfunktion auf mannigfache Weise darstellen. Am bekanntesten ist das *Laplace*'sche Integral[15]), das für beliebige reelle oder komplexe Werte des Arguments gilt:

$$P^n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [x \pm \cos\varphi \sqrt{x^2 - 1}]^n d\varphi. \tag{7}$$

Ferner gilt für solche x, deren reeller Teil positiv ist, die *Jacobi*'sche Formel[16]):

$$P^n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(x \mp \cos\varphi \sqrt{x^2 - 1})^{n+1}}. \tag{7a}$$

Andere Integralformeln, gültig für ein Argument zwischen -1 und $+1$, hat *P. G. Lejeune-Dirichlet*[17]) aufgestellt, und aus den *Dirichlet*'schen Formeln hat *G. Mehler*[18]) die folgenden einfacheren abgeleitet:

---

13) *Gauss*, Gott. Comm. 3 (1816); Werke 3, p. 163—196. Eine einfache Ableitung der *Gauss*'schen Resultate giebt *Jacobi*, J. f. Math. 1 (1826), p. 301—308; vgl. Werke 6, p. 3—11. — Vgl. im übrigen II A 2 (*Voss*), Nr. **52**—**55**.

14) *Thomson* und *Tait*, Th. Ph. 1, p. 175; *Maxwell*, Electr. 1, p. 164 der ersten englischen, p. 208 der deutschen Ausgabe.

15) *Laplace*, Mécan. cél. 5, Liv. XI, chap. II. — Betreffs der Ableitung vgl. *Jacobi*, J. f. Math. 26 (1843), p. 81; Werke 6, p. 148.

16) Die Gleichheit der rechten Seiten von (7) und (7a) für reelle positive x ist in der oben citierten *Jacobi*'schen Arbeit nachgewiesen; *Jacobi* leitet sogar ein noch etwas allgemeineres Resultat ab. Übrigens ist die Gleichheit der beiden Integrale schon in einer *Euler*'schen Formel enthalten; vgl. *Euler*, Instit. calc. integr. 4 (1794), Supplem. IV.

17) J. f. Math. 17 (1837), p. 35; Werke 1, p. 283.

18) Math. Ann. 5 (1872), p. 141. Ohne Benutzung der *Dirichlet*'schen Formeln ist die erste Gleichung (8) von *Bruns* abgeleitet oder vielmehr verificiert, J. f. Math. 90 (1881), p. 322.

$$(8) \qquad \frac{\pi}{2} P^n(\cos\vartheta) = \int_0^{\vartheta} \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\varphi \cdot d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\vartheta)}} = \int_{\vartheta}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\varphi \cdot d\varphi}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\varphi)}}.$$

Aus der ersten Gleichung (8) leitet *Heine*[19]) das wichtige Resultat ab, dass

$$(9) \qquad \lim_{n=\infty} P^n(\cos\vartheta) = 0$$

ist, wenn ϑ endlich und von 0 und π verschieden ist, aber auch, wenn ϑ sich mit wachsendem n der Null nähert, falls nur $\lim_{n=\infty}(n\vartheta) = \infty$ ist. Für $\vartheta = 0$ ist $P^n(\cos\vartheta) = 1$, auch falls $n = \infty$. Der Fall, dass $\lim_{n=\infty}(n\vartheta)$ einen endlichen Wert hat, wird bei den Cylinderfunktionen seine Erledigung finden (s. Nr. **47**).

Aus dem *Laplace*'schen Integral (7) lässt sich für grosse Werte von n der folgende Näherungswert von $P^n(\cos\vartheta)$ ableiten[20]):

$$(10) \qquad P^n(\cos\vartheta) = \sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\vartheta}} \cdot \sin\left[(n+\tfrac{1}{2})\vartheta + \frac{\pi}{4}\right],$$

und aus (10) ergiebt sich ebenfalls der durch Gleichung (9) ausgedrückte Satz. Die rechte Seite von (10) bildet das erste Glied einer nach fallenden Potenzen von n fortschreitenden Reihe; weitere Glieder dieser Reihe findet man bei *E. Heine*[21]) und in einer Arbeit von *G. Darboux*[22]).

Durch Integrale komplexer Variablen stellt *Laurent*[23]) die Kugelfunktion dar:

$$(11) \qquad P^n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{dz}{z^{n+1}\sqrt{1-2zx+z^2}} = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2^n}\int \frac{(z^2-1)^n\,dz}{(z-x)^{n+1}},$$

und zwar ist das erste Integral über einen um den Anfangspunkt, das zweite über einen um den Punkt x beschriebenen Kreis zu erstrecken.

In ausgedehntem Masse wird die komplexe Integration von

---

19) *Heine*, J. f. Math. 90 (1881), p. 329; *Bruns* leitet (J. f. Math. 90, p. 322) dasselbe Resultat aus einem etwas allgemeineren Integrale her, von dem das in (8) auftretende ein spezieller Fall ist.

20) *Laplace*, Mécan. cél. 5, Livre XI, Nr. 3 und Supplément au 5e vol. Nr. 1 (Oeuvres 5, p. 32, 471); auch Par. mém. 2 (1817) [19], p. 141 (Oeuvres 12, p. 415). — Vgl. *A. Cauchy*, Par. mém. 8 (1829), p. 125.

21) *Heine*, H. B. 1, p. 178.

22) *G. Darboux*, Par. C. R. 82 (1876), p. 365 u. 404; J. de math. (3) 4 (1878), p. 5 u. 377.

23) *Laurent*, J. de math. (3) 1 (1875), p. 373.

Schläfli[24]) benutzt, dessen Arbeit neben der Darstellung der einfachen Kugelfunktionen eine Erweiterung derselben enthält (vgl. Nr. **26**).

6. Integralsätze, Entwicklung ganzer Potenzen nach Kugelfunktionen, Rekursionsformeln. Falls irgend eine Funktion von x in eine nach Kugelfunktionen fortschreitende, gleichmässig konvergente Reihe entwickelt werden kann (über die Möglichkeit einer solchen Entwicklung s. Nr. **15** u. **16**), so ergeben sich die Koeffizienten der Entwicklung mittelst der folgenden beiden, in dieser Form zuerst von *Legendre*[25]) aufgestellten Sätze. Es ist

$$\int_{-1}^{+1} P^n(x) P^m(x)\, dx = 0, \text{ falls } m \lesseqgtr n, \tag{12}$$

während

$$\int_{-1}^{+1} P^n(x)\, P^n(x)\, dx = \frac{2}{2n+1} \tag{12a}$$

ist. Hieraus folgt, dass, wenn $f(x)$ sich in eine Reihe von der Form

$$f(x) = A_0 P^0(x) + A_1 P^1(x) + \cdots + A_n P^n(x) + \cdots$$

entwickeln lässt,

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P^n(x)\, dx \tag{12b}$$

ist. Man kann vorstehende Reihe ohne weiteres auf die Entwicklung ganzer Potenzen von x anwenden, da diese, wie aus der Reihe (4) folgt, sich durch eine endliche Summe von Kugelfunktionen ausdrücken lassen, somit auch auf beliebige ganze Funktionen von x. Für ganze Potenzen hat *Legendre*[26]) gefunden:

$$\left\{ \begin{aligned} x^n = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} \Big\{ & (2n+1) P^n(x) + (2n-3) \frac{2n+1}{2} P^{n-2}(x) \\ & + (2n-7) \frac{(2n+1)(2n-1)}{2 \cdot 4} P^{n-4}(x) + \cdots \Big\}. \end{aligned} \right. \tag{13}$$

Ferner ergiebt die Entwicklung von $x P^n(x)$ die wichtige Rekursionsformel[27]):

$$\left\{ \begin{aligned} (n+1) P^{n+1}(x) - (2n+1) x P^n(x) + n P^{n-1}(x) &= 0, \\ P^1(x) - x P^0(x) &= 0, \end{aligned} \right. \tag{14}$$

---

24) *Schläfli*, Kugelff. mit bel. Parameter (s. das Verzeichnis der Monographieen).

25) Par. Hist. 1784, p. 373 und 1789, p. 384.

26) Par. Hist. 1784 und Exercices 2, p. 352.

27) *O. Bonnet*, J. de math. 17 (1852), p. 267.

während die erste Ableitung von $P^n(x)$ sich nach *Christoffel*[28]) durch die Reihe darstellen lässt:

$$(15)\quad \begin{cases} \frac{dP^n(x)}{dx} = (2n-1)P^{n-1}(x) + (2n-5)P^{n-3}(x) \\ \qquad\qquad + (2n-9)P^{n-5}(x) + \cdots, \end{cases}$$

und aus dieser folgt

$$(15a)\qquad \frac{dP^{n+1}(x)}{dx} - \frac{dP^{n-1}(x)}{dx} = (2n+1)P^n(x).$$

Den Rekursionsformeln (14) und (15a) lässt sich noch eine grosse Reihe ähnlicher an die Seite stellen. Die vollständigste Sammlung derselben findet man in *F. Neumann*'s Beiträgen, und zwar im Anhang zur ersten Abteilung.

Von sonstigen Anwendungen der Formeln (12) und (12a) erwähnen wir noch die Entwicklung des Produktes zweier Kugelfunktionen in eine nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe, eine Aufgabe, die am vollständigsten ebenfalls in *F. Neumann*'s Beiträgen behandelt ist[29]). Auch $\sin(n\vartheta)$ und $\cos(n\vartheta)$ lassen sich für beliebige Werte von n nach Kugelfunktionen mit dem Argumente $\cos\vartheta$ entwickeln[30]). Ferner ist hier die Darstellung der Integrale

$$\int_0^x P^n(x)P^n(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_0^x (1-x^2)\,P^n(x)P^n(x)\,dx$$

durch eine Summe von Produkten von Kugelfunktionen zu erwähnen[31]).

7. Verschiedene Ausgangspunkte der Theorie, Tafeln. Statt der Differentialgleichung (2) oder der Entwicklung des Ausdrucks (3) kann man auch irgend eine der abgeleiteten Eigenschaften zum Ausgangspunkspunkte für die Darstellung der Theorie der einfachen Kugelfunktionen machen, so z. B. das *Laplace*'sche Integral (7)[32]) oder eins der anderen Integrale[33]). Ferner kann man von der Rekur-

---

28) Diss. Berlin 1856. — Betreffs der Ableitung vgl. *G. Bauer,* J. f. Math. 56 (1859), p. 101. — Eine andere Rekursionsformel findet sich in *Christoffel*'s Arbeit über die *Gauss*'sche Quadratur, J. f. Math. 55 (1858), p. 61.

29) Vorher schon von *Bauer,* Münch. Ber. 1875, p. 247; *Ferrers,* Spherical harmonics, 1877, und *Adams,* Lond. Roy. Proc. 27 (1878), p. 63.

30) Vgl. *Heine,* H. B. 1, § 20; ferner *Most,* J. f. Math. 70 (1869), p. 167.

31) *R. Hargreaves,* Lond. Math. S. Proc. 29 (1898), p. 115.

32) Vgl. *Heine,* H. B. 1, p. 23 u. 37 und *Schläfli,* Kugelf. m. bel. Par.

33) *Bruns* leitet in der schon oben erwähnten Arbeit (J. f. Math. 90, p. 322) aus einem allgemeineren Integral, von dem das *Mehler*'sche ein spezieller Fall ist, die wichtigsten Eigenschaften der Kugelfunktionen her.

sionsformel (14) als Definition ausgehen[34]) oder auch von der durch die Gleichung (12) oder eine analoge Gleichung ausgedrückten Eigenschaft[35]). Als Spezialfälle der *Riemann*'schen P-Funktion behandelt *R. Olbricht* die Kugelfunktionen, resp. gewisse Verallgemeinerungen derselben[36]).

Tafeln der Kugelfunktionen sind von *J. W. L. Glaisher* berechnet[37]); einen Auszug aus diesen Tafeln, nämlich die Werte von $P^1(x)$ bis $P^7(x)$ zwischen $x = 0$ und $x = 1$, in Schritten von $\frac{1}{100}$ fortschreitend, auf 4 Dezimalen, enthält das Buch von *Byerly*; bis $P^6(x)$ abgedruckt bei *R. Fricke.* In dem Buche von *Byerly* ist auch eine zweite Tafel abgedruckt, enthaltend die Werte von $P^1(\cos\vartheta)$ bis $P^7(\cos\vartheta)$ auf 4 Dezimalen für alle ganzen Grade[38]). Tafeln für P^6 und P^7 sowie ihre Ableitungen, ebenfalls auf 4 Dezimalen, nebst einer graphischen Darstellung in *Thomson* und *Tait,* Th. Ph. 2, p. 334—339. — Tafeln der Kugelfunktionen für specielle Werte des Arguments enthalten *F. Neumann*'s Beiträge[39]).

III. Zugeordnete Kugelfunktionen.

8. **Zugeordnete Kugelfunktionen; ihre Differentialgleichung, verschiedene Darstellungen.** Durch Entwicklung der in dem *Laplace*schen Integral (Formel 7) auftretenden Funktion in eine nach Potenzen von $e^{i\varphi}\sqrt{x^2-1}$ fortschreitende Reihe finden *E. Heine*[40]) und *C. G. J. Jacobi*[41]):

---

34) *K. Baer,* Progr. Realschule Kiel, 1898.

35) *Murphy* geht in elementary principles, Cambridge 1833, von der Eigenschaft aus, dass eine Funktion $f(x)$ vom Grade n gesucht wird, so dass

$$\int_0^1 t^\nu f(t)\,dt = 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1;$$

vgl. *Thomson* und *Tait,* Th. Ph. 2, p. 328. — Die Aufgabe, eine Funktion $f(x)$ dieser Bedingung gemäss zu bestimmen, ist zuerst von *Jacobi,* J. f. Math. 1 (1826), p. 301, Ges. W. 6, p. 3, behandelt.

36) Diss. Leipzig 1887; Leopold. N. A. 52 (1888). — Vgl. Nr. **26**.

37) Report of the British Association for the year 1879. Neue Tafeln bis $P^{(20)}$ bei *A. Lodge,* Lond. Trans. 203 A (1904), p. 100.

38) Diese Tafel, unter der Leitung von *Perry* berechnet, ist zuerst veröffentlicht im Phil. Magaz. (5) 32 (1891), p. 512.

39) Anhang zur ersten Abteilung, § 7.

40) Dissertatio Berol., 1842, § 7—8.

41) *Jacobi,* J. f. Math. 26 (1843), p. 81; Werke 6, p. 148. *Jacobi* entwickelt ferner die $-(n+1)^{\text{te}}$ Potenz des links stehenden Ausdrucks. — *Beltrami* hat neuerdings [Lomb. Rend. (2) 29 (1896), p. 793] gezeigt, wie man auch ohne Be-

$$(16)\quad \begin{cases} (x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^n = \dfrac{1}{2^n\cdot n!}\dfrac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \\ \qquad + \dfrac{2}{2^n}\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\nu=n}\dfrac{\sqrt{x^2-1}^{\nu}}{(n+\nu)!}\dfrac{d^{n+\nu}(x^2-1)^n}{dx^{n+\nu}}\cos(\nu\varphi). \end{cases}$$

Zugleich ergiebt diese Entwicklung eine zuerst von *Jacobi* aufgestellte Formel[42]), die aussagt, dass die Glieder unter dem Summenzeichen durch Vertauschung von ν mit $-\nu$ ihren Wert nicht ändern. Das erste Glied der rechten Seite von (16) ist $P^n(x)$. Es liegt nahe, ebenso die Koeffizienten der einzelnen Cosinus zu untersuchen. *Heine* nennt diese Koeffizienten, mit gewissen Konstanten multipliziert, die *zugeordneten Kugelfunktionen* und bezeichnet sie mit $P_\nu^n(x)$, so dass

$$(17)\quad \begin{cases} P_\nu^n(x) = \dfrac{(n-\nu)!}{(2n)!}\sqrt{x^2-1}^{\nu}\dfrac{d^{n+\nu}(x^2-1)^n}{dx^{n+\nu}} \\ \qquad = \dfrac{(n-\nu)!}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}\sqrt{x^2-1}^{\nu}\dfrac{d^\nu P^n(x)}{dx^\nu}. \end{cases}$$

Der konstante Faktor ist so bestimmt, dass nach Ausführung der Differentiation der Koeffizient der höchsten Potenz von x gleich 1 wird. Hiernach ist

$$(17a)\quad \begin{cases} P_\nu^n(x) = \sqrt{x^2-1}^{\nu}\left\{x^{n-\nu} - \dfrac{(n-\nu)(n-\nu-1)}{2\cdot(2n-1)}x^{n-\nu-2}\right. \\ \qquad \left. + \dfrac{(n-\nu)(n-\nu-1)(n-\nu-2)(n-\nu-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}x^{n-\nu-4} - \cdots\right\}. \end{cases}$$

Ferner ist

$$P_0^n(x) = \frac{n!}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}P^n(x);\quad P_n^n(x) = (x^2-1)^n;$$

$$P_\nu^n(x) = 0 \text{ für } \nu > n;\quad P_\nu^n(x) = P_{-\nu}^n(x) \text{ für } \nu \leq n.$$

Aus (16) ergiebt sich für die zugeordneten Kugelfunktionen die Integraldarstellung:

$$(18)\quad P_\nu^n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{2^n(n+\nu)!(n-\nu)!}{(2n)!}\int_0^\pi (x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^n\cos(\nu\varphi)d\varphi.$$

Ferner folgt aus (17) und (2), dass $P_\nu^n(x)$ der Differentialgleichung

$$(19)\quad \frac{d(1-x^2)\dfrac{dP_\nu^n(x)}{dx}}{dx} + \left(n(n+1) - \frac{\nu^2}{1-x^2}\right)P_\nu^n(x) = 0$$

genügt.

---

nutzung des *Laplace*'schen Integrals auf eine der Gleichung (16) analoge Entwicklung geführt wird.

42) *Jacobi*, J. f. Math. 2 (1827), p. 223; Werke 6, p. 21.

Auch für $P_\nu^n(x)$ lassen sich, ebenso wie für $P^n(x)$, noch andere Reihen aufstellen, z. B. eine der Reihe (4b) analoge, ferner existieren noch andere Integraldarstellungen; endlich lassen sich auch diese Funktionen als hypergeometrische Reihen oder in Determinantenform darstellen. Dass die Wurzeln der Gleichung $P_\nu^n(x) = 0$ sämtlich reell sind und zwischen -1 und $+1$ liegen, und dass die von ± 1 verschiedenen Wurzeln unter einander verschieden sind, folgt unmittelbar aus Nr. 4.[43]).

9. Integralsätze der Zugeordneten. Den Integralsätzen (12) und (12a) entsprechen die folgenden:

$$\int_{-1}^{+1} P_\nu^n(x) P_\nu^m(x)\, dx = 0, \tag{20}$$

$$\int_{-1}^{+1} [P_\nu^n(x)]^2 dx = (-1)^\nu \frac{2}{2n+1} \frac{(n+\nu)!\,(n-\nu)!}{(1\cdot 3\cdots(2n-1))^2}, \tag{20a}$$

wo n und m von einander verschiedene positive ganze Zahlen sind, die nicht unter ν liegen. Den Formeln (20) treten noch die folgenden zur Seite:

$$\int_{-1}^{+1} P_\mu^n(x) P_\nu^n(x) \frac{dx}{1-x^2} = 0; \quad \mu \gtrless \nu, \text{ beide } \leqq n; \tag{21}$$

$$\int_{-1}^{+1} [P_\nu^n(x)]^2 \frac{dx}{1-x^2} = \frac{(-1)^\nu}{\nu} \frac{(n-\nu)!\,(n+\nu)!}{(1\cdot 3\cdots(2n-1))^2}, \quad n \geqq \nu > 0. \tag{21a}$$

Hiernach sind zweierlei Arten von Entwicklungen nach zugeordneten Kugelfunktionen möglich, einerseits solche mit konstantem Nebenindex ν, andererseits solche mit konstantem Hauptindex n, wobei festzuhalten, dass stets $n \geqq \nu$. Ebenso lassen sich zweierlei Rekursionsformeln aufstellen, einmal solche zwischen P_ν^n, P_ν^{n+1}, P_ν^{n-1}, sodann solche zwischen P_ν^n, $P_{\nu+1}^n$, $P_{\nu-1}^n$. Vgl. *Heine*, H. B. 1, p. 259 und *F. Neumann*, Beiträge, Anhang zur ersten Abt. § 5.

10. F. Neumann's Definition dieser Funktionen. Abweichend von *Heine* definiert *F. Neumann* die zugeordneten Kugelfunktionen, die er abgeleitete nennt. Er setzt[44])

---

43) Betreffs der geometrischen Darstellung von $P_\nu^n(x)$ im reellen Gebiet vgl. die 36) angeführte Dissertation von *R. Olbricht*. Dort sind auch für die P_ν^n, resp. für Verallgemeinerungen derselben (vgl. Nr. **26**) die verschiedenen möglichen Darstellungen durch hypergeometrische Reihen abgeleitet.

44) *F. Neumann*, Beiträge, p. 2—3; Vorlesungen über Potentialtheorie etc., p. 70 u. 322. An letzterer Stelle wird der Ausdruck „adjungierte Funktionen"

$$P_{n\nu}(x) = \sqrt{1-x^2}^{\nu} \frac{d^{\nu} P^n(x)}{dx^{\nu}}, \tag{22}$$

so dass

$$P_{n\nu}(x) = (-1)^{\frac{1}{2}\nu} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{(n-\nu)!} P_{\nu}^{n}(x) \tag{22a}$$

ist. Der konstante Faktor ist hier so bestimmt, dass P_{n0} und P_n identisch werden.

IV. Darstellung der allgemeinen Kugelfunktion.

11. Darstellung der allgemeinen Kugelfunktion zweier Veränderlichen durch Zugeordnete. Durch die Einführung der zugeordneten Kugelfunktionen sind die Mittel für die Darstellung der allgemeinen Kugelfunktion gewonnen. Dieselbe genügt, als Funktion von ξ und ω betrachtet, der Gleichung (1). Setzt man zur Lösung derselben φ gleich dem Produkte zweier Funktionen, deren eine nur von ξ, die andere nur von ω abhängt, so ergiebt sich für letztere $\cos(\nu\omega)$, resp. $\sin(\nu\omega)$, und wegen der Eigenschaften der Kugelfunktion muss ν eine ganze Zahl sein, die $\leqq n$ ist. Der zweite Faktor genügt dann der Gleichung (19), und zwar kann nur dasjenige partikuläre Integral von (19) in Betracht kommen, das eine ganze Funktion von ξ und $\sqrt{1-\xi^2}$ ist, d. h. $P_{\nu}^{n}(\xi)$. Somit ist eine Lösung von (1), die auch allen sonstigen Bedingungen genügt,

$$P_{\nu}^{n}(\xi)\cos(\nu\omega), \text{ resp. } P_{\nu}^{n}(\xi)\sin(\nu\omega).^{45}) \tag{23}$$

Solcher Lösungen existieren, da ν alle ganzzahligen Werte von 0 bis n annehmen kann, $2n+1$. Die Summe aller, jede mit einer willkürlichen Konstanten multipliziert, genügt ebenfalls allen Bedingungen. Somit hat man für die Kugelfunktion mit zwei Veränderlichen (auch allgemeine Kugelfunktion oder nach dem Autor, bei dem sie zuerst auftritt[44]), *Laplace*'sche Funktion genannt), falls noch $\xi = \cos\vartheta$ gesetzt wird, die Darstellung:

$$Y_n(\vartheta, \omega) = \sum_{\nu=0}^{n} [A_\nu \cos(\nu\omega) + B_\nu \sin(\nu\omega)] P_{\nu}^{n}(\cos\vartheta). \tag{23a}$$

gebraucht. *Laplace* (Mécan. cél. 2, Livre III, chap. 2) hat zwar für die Zugeordneten keine besondere Bezeichnung eingeführt; seine Darstellung der allgemeinen Kugelfunktionen mit zwei Variabeln stimmt aber (bis auf den Faktor $(-1)^{\frac{1}{2}\nu}$) mit *Heine*'s Darstellung überein. — *Thomson* und *Tait* sowie *Maxwell* folgen *Laplace*, *Beltrami* schliesst sich *Neumann* an.

45) Eine andere Ableitung dieser Funktionen findet sich bei *E. Beltrami*, Lomb. Rend. (2) 29 (1896), p. 793.

Wegen der $(2n+1)$ willkürlichen Konstanten, die in $Y_n(\vartheta, \varphi)$ enthalten sind, sieht man, dass die konstanten Faktoren, um die sich die verschiedenen Definitionen der Zugeordneten unterscheiden, in Y_n von keiner Bedeutung sind, auch nicht der Faktor $(-1)^{\frac{1}{2}\nu}$.[46])

Die Funktionen (23) werden von *Thomson* und *Tait* sowie von *Maxwell* als „*tesserale* harmonische Funktionen" bezeichnet. Sie verschwinden nämlich auf solchen Kreisen einer Kugelfläche, welche diese Fläche in Kugelvierecke teilen, die je von zwei Parallelkreisen und zwei Meridianen begrenzt werden. Für den Fall $\nu = n$ gehen die Vierecke in Kugelzweiecke über, weshalb diese Funktionen auch „*sektorielle* harmonische Funktionen" heissen, während für $\nu = 0$ Zonen an Stelle der Vierecke treten, womit die Bezeichnung der einfachen Kugelfunktionen als „*zonale* harmonische Funktionen" (vgl. Nr. 2) gerechtfertigt ist.

12. Darstellung von Y_n bei Maxwell und Thomson und Tait. *Maxwell* definiert die allgemeine Kugelfunktion oder harmonische Kugelflächenfunktion durch die Gleichung:

$$Y_n(\vartheta, \varphi) = (-1)^n \frac{r^{n+1}}{n!} \frac{\partial}{\partial h_1} \frac{\partial}{\partial h_2} \cdots \frac{\partial}{\partial h_n} \left(\frac{1}{r}\right) \cdot C. \tag{24}$$

Darin sind r, ϑ, φ räumliche Polarkoordinaten eines Punktes, $\frac{\partial}{\partial h_i}$ bezeichnet die Differentiation nach einer beliebigen Richtung (Axe) h_i, C eine willkürliche Konstante[47]). Fallen die n Axen mit der z-Axe zusammen, so erhält man die zonale harmonische Funktion [Gl. (6)], für die zugleich $C = 1$ genommen wird. Die tesseralen Funktionen ergeben sich dadurch, dass man $n - \nu$ Pole (Schnitte der Axen mit der Kugel) mit dem positiven Pole der Kugel zusammenfallen lässt und die übrigen Pole gleichmässig auf dem Äquator oder seiner Hälfte verteilt, je nachdem ν ungerade oder gerade ist.

Thomson und *Tait* leiten aus ihrer Definition der räumlichen harmonischen Funktionen für die tesseralen und sektoriellen Funktionen den Ausdruck ab:

$$r^{n+1} \frac{\partial^{j+k+l}\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^j \partial y^k \partial z^l}, \quad j+k+l = n; \tag{25}$$

46) Betreffs des Beweises, dass (23a) die allgemeinste in Nr. 1 definierte Funktion darstellt, vgl. *R. Dedekind*, Zürich Viertelj. 4 (1859), p. 346. — Über die Transformation der Kugelfunktionen beim Übergang von einem Polarkoordinatensystem zu einem andern vgl. *Ad. Schmidt*, Zeitschr. f. Math. 44 (1899), p. 327.

47) Bei *Maxwell* fehlt der Faktor C, der jedoch dann hinzuzufügen ist, wenn Y_n die allgemeine Funktion mit $(2n+1)$ Konstanten sein soll.

x, y, z sind dabei rechtwinklige Koordinaten, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Auch aus (24) und (25) lässt sich (23a) ableiten[48]).

13. Das Additionstheorem der einfachen Kugelfunktionen. Einen speziellen Fall der allgemeinen Kugelfunktion bildet die einfache Kugelfunktion $P^n(\cos\gamma)$ mit dem zusammengesetzten Argument

$$\cos\gamma = \cos\vartheta\cos\vartheta_1 + \sin\vartheta\sin\vartheta_1\cos(\omega - \omega_1). \tag{26}$$

Da diese Funktion aus $P^n(\cos\vartheta)$ oder $P^n(\cos\vartheta_1)$ durch eine Transformation der Axen hervorgeht, so muss sie nach einer in Nr. **1** gemachten Bemerkung, sowohl wenn man sie als Funktion von ϑ, ω, als auch wenn man sie als von ϑ_1, ω_1 abhängig ansieht, in der allgemeinen Form (23a) enthalten sein. Ausserdem kann sie als ganze Funktion von $\cos\gamma$ nur Kosinus der Vielfachen von $\omega - \omega_1$ enthalten. Das giebt die Entwicklung:

$$P^n(\cos\gamma) = \sum_{\nu=0}^{n} h_\nu P_\nu^n(\cos\vartheta) P_\nu^n(\cos\vartheta_1)\cos\nu(\omega - \omega_1), \tag{27}$$

und zwar ist

$$h_\nu = (-1)^\nu 2\,\frac{[1\cdot 3\cdots(2n-1)]^2}{(n+\nu)!\,(n-\nu)!}, \tag{27a}$$

wobei für $\nu = 0$ die Hälfte dieses Ausdrucks zu nehmen ist[49]).

Gleichung (27) heisst das *Additionstheorem* der Kugelfunktionen erster Art. $P^n(\cos\gamma)$ selbst bezeichnet man wohl auch als *Laplace*'schen Koeffizienten[50]) oder als „zweiaxige harmonische Flächenfunktion“[51]). Den Wert der Konstante h_ν bestimmt *Laplace*[52]) für gerade $n - \nu$, indem er $\vartheta = \vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$ setzt und (27) mit (4b) vergleicht. Für ungerade $n - \nu$ muss man (27) zuerst nach ϑ und ϑ_1 differentiieren und dann $\vartheta = \vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$ setzen. Eine andere Art der Bestimmung von h_ν ergiebt sich daraus, dass man von vorne herein an Stelle von $\cos\vartheta$ und $\cos\vartheta_1$ zwei Variable x und x_1 nimmt, die auch grösser

48) Betreffs der geometrischen Bedeutung der Kugelfunktionen vgl. *Gauss*' Werke 5, p. 631; *Heine*, J. f. Math. 68 (1868), p. 386.

49) Ersetzt man die *Heine*'sche Funktion $P_\nu^n(\cos\vartheta)$ durch die *Neumann*sche $P_{n\nu}(\cos\vartheta)$ (vgl. Nr. **10**), so wird $h_\nu = 2\,\frac{(n-\nu)!}{(n+\nu)!}$, wobei wieder für $\nu = 0$ die Hälfte zu nehmen ist.

50) Gl. (27) kommt in richtiger Form zuerst bei *Legendre* (Paris mém. von 1789) vor, während die entsprechende Gleichung in *Laplace*'s Abhandlung von 1782 fehlerhaft ist.

51) *Thomson* u. *Tait*, Th. Ph. 1, p. 174.

52) *Laplace*, Mécan. cél. 2, Livre III, chap. II. — Eine andere Methode der Bestimmung von h_ν findet man bei *F. Neumann*, Vorles. über Potential. p. 71 ff.

als 1 sein können, also P^n mit dem zusammengesetzten Argumente $z = xx_1 - \sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos(\omega-\omega_1)$ betrachtet, dafür die Gültigkeit der Form (27) nachweist, dann $\lim_{x=\infty} \frac{P^n(z)}{x^n}$ bildet und mit (16) vergleicht[53]). *Jacobi* leitet (27) daraus ab, dass er den Ausdruck (3), darin z statt ζ gesetzt, durch ein bestimmtes Integral ausdrückt und nach Potenzen von α entwickelt[54]).

Ausser der obigen Entwicklung von $P^n(\cos\gamma)$ giebt *P. A. Hansen*[55]) eine solche nach Potenzen von $\sin\frac{1}{2}(\omega-\omega_1)$ oder $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\omega-\omega_1)$. Ferner entwickelt *Hansen* auch noch die Funktion $P^n(\cos\alpha\cdot\cos\beta)$ nach Kosinus der Vielfachen von β.

14. Integralsätze der allgemeinen Kugelfunktionen. Für die allgemeinen Kugelfunktionen hat *Laplace*[56]) folgende Integralsätze gefunden. Ist $Y_n(\vartheta,\omega)$ die Funktion (23a) und ist $Z_m(\vartheta,\omega)$ eine Funktion derselben Art von der Ordnung m, deren Konstante mit A_ν', B_ν' bezeichnet werden mögen, so ist

$$(28)\qquad \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\omega \sin\vartheta\, Y_n(\vartheta,\omega) Z_m(\vartheta,\omega) = 0, \text{ falls } m \gtrless n,$$

während

$$(28a)\qquad \begin{cases} \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\omega \sin\vartheta\, Y_n(\vartheta,\omega) Z_n(\vartheta,\omega) = \frac{2\pi}{2n+1} \frac{1}{(1\cdot 3\cdots(2n-1))^2} \\ \cdot\left\{2\cdot n!\, n!\, A_0 A_0' + \sum_1^n (n-\nu)!\,(n+\nu)!\,(A_\nu A_\nu' + B_\nu B_\nu')\right\} \end{cases}$$

ist. Wird speziell $Z_m(\vartheta,\omega) = P^m(\cos\gamma)$, wo $\cos\gamma$ der Ausdruck (26), so bleibt Gleichung (28), während (28a) in folgende übergeht:

$$(28b)\qquad \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\omega \sin\vartheta\, Y_n(\vartheta,\omega) P^n(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2n+1} Y_n(\vartheta_1,\omega_1).$$

Ist $\cos\gamma$ der Ausdruck (26),

$$\cos\gamma_1 = \cos\vartheta\cos\vartheta_2 + \sin\vartheta\sin\vartheta_2\cos(\omega-\omega_2),$$
$$\cos\delta = \cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 + \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos(\omega_1-\omega_2),$$

so folgt aus (28b)

53) *Heine*, H. B. 1, p. 313.
54) *Jacobi*, J. f. Math. 26 (1843), p. 81; Werke 6, p. 148.
55) *Hansen*, Leipz. Abh. 2, 1855.
56) Mécan. cél. 2, Livre III, chap. II.

$$(28\,c)\quad \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\omega \sin\vartheta P^n(\cos\gamma) P^n(\cos\gamma_1) = \frac{4\pi}{2n+1} P^n(\cos\delta),$$

und für $\vartheta_2 = \vartheta_1$, $\omega_2 = \omega_1$ ergiebt sich weiter

$$(28\,d)\qquad \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\omega \sin\vartheta\, [P^n(\cos\gamma)]^2 = \frac{4\pi}{2n+1}.$$

15. Entwicklung einer Funktion zweier Variabeln nach Kugelfunktionen. Die Gleichung (28b) giebt die Mittel, um, falls die Entwicklung einer beliebig auf der Kugelfläche gegebenen Funktion in eine gleichmässig konvergente Reihe nach Kugelfunktionen möglich ist, die einzelnen Glieder dieser Entwicklung zu finden. Es wird nämlich

$$(29)\quad f(\vartheta, \omega) = \sum_n \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi} d\vartheta_1 \int_0^{2\pi} d\omega_1 \sin\vartheta_1 f(\vartheta_1, \omega_1) P^n(\cos\gamma),$$

$$0 \leqq \vartheta \leqq \pi, \quad 0 \leqq \omega \leqq 2\pi.$$

Dass die einzelnen Glieder der rechten Seite von (29) die Form von Kugelfunktionen haben, folgt aus (27), wenn man beachtet, dass die in Bezug auf ϑ_1, ω_1 vorzunehmenden Operationen die Faktoren $P_\nu^n(\cos\vartheta)\cos(\nu\omega)$ und $P_\nu^n(\cos\vartheta)\sin(\nu\omega)$ ungeändert lassen. Ferner erkennt man mittelst der Integralsätze in Nr. **14**, dass, falls eine Funktion nach Kugelfunktionen in eine gleichmässig konvergente Reihe entwickelt werden kann, dies stets nur auf *eine* Art möglich ist. Ohne weiteres ergiebt sich die Möglichkeit der Entwicklung für ganze Funktionen der Koordinaten ξ, η, ζ eines Punktes der Kugel, da hier die Reihe (29) endlich ist[57]).

16. Beweis für die Gültigkeit der Entwicklung nach Dini und Heine. Von äusserster Wichtigkeit ist die Frage, unter welcher Bedingung Gl. (29) gültig ist, d. h. die Frage, wie f beschaffen sein muss, damit die Reihe konvergiert und die Summe wirklich $f(\vartheta, \omega)$ darstellt. Diese Frage ist zuerst von *S. D. Poisson*[58]) behandelt; seine Ableitung gilt aber nur unter gewissen einschränkenden Bedingungen über die Natur der zu entwickelnden Funktion, insbesondere über die Kontinuität ihrer Differentialquotienten, Bedingungen, die für die

57) Über die Zerlegung einer homogenen ganzen Funktion von ξ, η, ζ in Kugelfunktionen vgl. eine Bemerkung aus dem Nachlass von *Gauss*, Werke 5, p. 630.

58) Connaiss. des temps pour 1831; Théorie de la chaleur, Paris 1835, p. 212.

Gültigkeit von (29) nicht notwendig sind. Das zeigte *Dirichlet*[59]) der, gestützt auf den *Dirichlet*'schen Integralausdruck für $P^n(\cos\gamma)$ (Nr. 5), die Aufgabe in ähnlicher Weise behandelte wie bei den trigonometrischen Reihen. Heute gilt dieser Beweis nicht mehr als völlig genügend, da er die Differentiierbarkeit einer gewissen Hülfsfunktion verlangt, ohne dass man angeben kann, welche Eigenschaften die zu entwickelnde Funktion besitzen muss, damit jene Differentiation möglich ist. Auch der später von *O. Bonnet* gegebene Beweis[60]) verlangt von der Funktion f eine gewisse Eigenschaft, die für die Möglichkeit der Entwicklung nicht unbedingt nötig ist. Die Behandlung der Frage ist aufs neue 1874 von *U. Dini* aufgenommen, und der *Dini*sche Beweis ist später von *E. Heine*[61]) in einem wesentlichen Punkte modifiziert, resp. ergänzt. Der Gedankengang des modifizierten Beweises ist folgender:

Zunächst wird, wie bei *Dirichlet*, das Integral (29) durch Verlegung des Poles in den Punkt ϑ, φ transformiert. Das giebt dasselbe Resultat, als wenn man $\vartheta = 0$, d. h. $\cos\gamma = \cos\vartheta_1$ setzt. Das Integral nach ω_1 stellt dann das mit 2π multiplizierte Mittel der Werte von $f(\vartheta_1, \omega_1)$ auf dem Parallelkreis ϑ_1 dar. Dies Mittel sei $F(\vartheta_1)$. Sodann kann man die Summe S_n der n ersten Glieder mittelst der Formel (15a) als Summe zweier Integrale ausdrücken, deren erstes

$$\int_0^{\pi} F(\vartheta_1)\,\frac{dP^n(\cos\vartheta_1)}{d\vartheta_1}\,d\vartheta_1 \tag{29a}$$

ist. Zerlegt man dies Integral in Teilintegrale, deren erstes und letztes die Grenzen η und ξ (s. unten) haben, während die Grenzen der übrigen die Wurzeln von $P^n = 0$ und $\frac{dP^n}{d\vartheta_1} = 0$ sind, wendet auf letztere den ersten Mittelwertsatz an und geht dann zu $n = \infty$ über, so findet man durch Benutzung von (9), dass diese Teilintegrale verschwinden. Es bleiben daher nur Integrale der Form (29a) zu untersuchen, deren Grenzen 0 und η, resp. ξ und π sind, unter η eine Grösse verstanden, die sich mit wachsendem n der Null beliebig nähert, doch so, dass $\lim_{n=\infty} P^n(\cos\eta) = 0$ ist, während ξ sich in derselben Weise dem Werte π nähert. In der exakten Untersuchung

59) J. f. Math. 17 (1837), p. 35—56; Werke 1, p. 283—306.

60) *Bonnet*, Brux. mém. cour. (4°) 23 (1850), § IV, p. 65; mit geringen Änderungen Thèse de mécan., J. de math. 17, 1852.

61) *U. Dini*, Ann. di mat. (2) 6, 1874; *Heine*, H. B. 1, p. 435 ff. — Vgl. auch H. B. 2, p. 361, Anmerkung.

dieser Integrale besteht wesentlich *Heine*'s Ergänzung des *Dini*'schen Beweises. Durch Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes findet er

$$\lim_{n=\infty} S_n = F(0),$$

und zwar nähert sich $S_n - F(+0)$ für alle Werte eines etwa in F enthaltenen Parameters der Null in gleichem Grade. Kehrt man durch Transformation der Koordinaten zum allgemeinen Falle zurück, so ergiebt sich als Summe der Reihe (29) das arithmetische Mittel aller Werte, welche $f(\vartheta, \omega)$ auf einem um den Punkt ϑ, ω mit dem Radius γ beschriebenen Kreise für $\gamma = 0$ annimmt. Die einzige Voraussetzung, die bei dem Beweise betreffs der zu entwickelnden Funktion f gemacht wird, ist, dass $F(\gamma)$ endlich, ferner in der Nähe von $\gamma = 0$ kontinuierlich ist und an letzterer Stelle nicht unendlich viele Maxima und Minima hat.

17. Andere Beweise. In demselben Jahre wie die *Dini*'sche erschien eine Arbeit von *G. Darboux*[62]) über dieselbe Frage. *Darboux* beginnt ganz ähnlich wie *Dini*, wendet aber auf die Teilintegrale, die *Dini* durch Benutzung der Wurzeln von $\frac{dP^n}{d\vartheta_1} = 0$ nochmals zerlegt, teilweise Integration an. Er setzt demgemäss voraus, dass $F(\vartheta_1)$ im allgemeinen eine kontinuierliche Funktion ist, die nur eine endliche Zahl von Diskontinuitäten enthält.

Durch Betrachtungen anderer Art gelangt *C. Neumann*[63]) zum Ziele. Er bestimmt die Grenze des Integrals (29a) unter der Voraussetzung, dass die Funktion $F(\vartheta_1)$ innerhalb des Intervalls 0 bis π abteilungsweise stetig und abteilungsweise monoton (d. h. nur wachsend oder nur abnehmend) ist, indem er das Integral in Teilintegrale teilt, deren Grenzen feste, der Funktion F eigentümliche Punkte sind, und den zweiten Mittelwertsatz anwendet. Die obige Voraussetzung kann man auch so aussprechen, dass die Kugelfläche durch irgend welches Netz von Kurven in eine endliche Anzahl von Teilen zerlegt werden kann, und dass auf jedem solchen Teile $f(\vartheta, \omega)$ stetig ist; dabei darf keine jener Kurven unendlich viele Ecken noch unendlich viele Oscillationen besitzen.

In neuerer Zeit hat *H. Poincaré*[64]) einen neuen Beweis für die Entwicklung (29) mitgeteilt. Er denkt sich die zu entwickelnde Funktion als den Wert, den das Potential von Massen, die ausserhalb der

62) *Darboux*, J. de math. (2) 19 (1874), p. 1.
63) *C. Neumann*, Entwickelungen, Kap. IV.
64) *Poincaré*, Par. C. R. 118 (1894), p. 497.

Kugel vom Radius 1 liegen, auf dieser Kugelfläche annimmt, und betrachtet zunächst den Wert W, den das Potential jener Massen für innere Punkte hat. Der Ausdruck für W wird transformiert und der transformierte Ausdruck für *komplexe* Werte von r (r Abstand vom Kugelmittelpunkt) untersucht. Dann lässt er den Modul von r gegen 1 konvergieren und zeigt, dass, falls $r = e^{i\psi}$, W sich in eine *Fourier*sche Reihe entwickeln lässt, diese aber geht für $\psi = 0$ in die Kugelfunktionenreihe über. Die Bedingungen für die Entwickelbarkeit sind bei *Poincaré*: Man denke die Kugeloberfläche in eine endliche Anzahl von Bezirken geteilt, deren jeder durch eine endliche Anzahl von Bogen analytischer Kurven begrenzt wird; in jedem einzelnen dieser Bezirke soll $f(\vartheta, \omega)$ eine analytische Funktion sein, die beim Übergange zu einem anderen Bezirk diskontinuierliche Änderungen erleiden kann, aber endlich bleibt.

A. Sommerfeld[65]) leitet (29) dadurch ab, dass er alle Glieder der rechten Seite mit einem passenden, von t abhängigen Faktor multipliziert, derart, dass die Reihe sicher konvergent ist und für $t = 0$ in (29) übergeht. Es ist dann nur zu untersuchen, unter welchen Bedingungen bei dem letzten Grenzübergang die Konvergenz erhalten bleibt.

18. F. Neumann's Entwicklung nach Kugelfunktionen auf Grund gegebener Beobachtungen. Die Aufgabe, eine Funktion nach Kugelfunktionen auf Grund gegebener Beobachtungen zu entwickeln, d. h. in der endlichen Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n} Y_\nu(\vartheta, \omega)$$

die $(n+1)^2$ Konstanten so zu bestimmen, dass die Reihe für ebensoviel gegebene Werte von ϑ, ω durch Beobachtung gegebene Grössen darstellt, ist zuerst für den Fall $n = 4$ von *Gauss*[66]) gelöst. Eine einfache Methode zur Bestimmung der Konstanten ist von *F. Neumann*[67]) angegeben. Diese setzt allerdings voraus, dass die Punkte,

65) *Sommerfeld,* Dissertation Königsberg i. Pr. 1891. — Ein ähnliches Verfahren, wenn auch nicht so exakt durchgeführt, hatte schon *Poisson* benutzt, J. éc. pol. cah. 19 (1823), p. 145; vgl. dazu das Referat von *H. Burkhardt*, D. Math.-V. 10 (1902), p. 380.

66) *Gauss,* Resultate aus den Beobacht. d. magnet. Vereins für 1838, Leipzig 1839; *Gauss,* Werke 5, p. 119.

67) *F. Neumann,* Astron. Nachr. 15 (1838), p. 313; wieder abgedruckt Math. Ann. 14 (1879), p. 567. — Vgl. *F. Neumann,* Vorl. über Potentialtheorie, Kap. VII. — Über neuere hierher gehörige Untersuchungen vgl. das Referat von *H. Burkhardt,* D. Math.-V. 10 (1902), § 34, p. 388.

für welche die Beobachtungen gegeben sind, in bestimmter Weise auf der Kugel verteilt sind, berücksichtigt aber auch den Fall, dass nicht alle Konstanten vollständig bestimmt zu werden brauchen, sondern dass z. B. von den höheren Y_n nur das von ω unabhängige Glied und die zunächst darauf folgenden in Frage kommen. Die Methode beruht auf folgenden Sätzen über endliche Summen von Kugelfunktionen, die den Integralsätzen (12), (12a), resp. (20), (20a) analog sind. „Genügen die $(2p+2)$ Konstanten $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p+1}$, $a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}$ den $(2p+2)$ Gleichungen:

$$(30)\quad a_1\mu_1^i + a_2\mu_2^i + \cdots + a_{p+1}\mu_{p+1}^i = \int_{-1}^{+1} x^i dx,\ (i = 0, 1, 2, \ldots, 2p+1),$$

so ist, falls $m + n \leqq 2p+1$ ist,

$$(30a)\qquad \sum_{\lambda=1}^{p+1} a_\lambda P_m(\mu_\lambda) P_n(\mu_\lambda) = \frac{2}{2n+1} \text{ oder } = 0,$$

je nachdem $m = n$ oder $m \gtrless n$ ist. Gleichzeitig sind die $\mu_1, \ldots, \mu_{p+1}$ Wurzeln der Gleichung $P^{(p+1)}(\mu) = 0$.“ Ein analoger Satz existiert auch für die zugeordneten Kugelfunktionen.

V. Kugelfunktionen zweiter Art.

19. Die Kugelfunktion zweiter Art Q^n. Die Kugelfunktion erster Art $P^n(x)$ ist ein solches partikuläres Integral der Gleichung (2) (deren unabhängige Variabele jetzt mit x bezeichnet werden möge), das für alle endlichen Werte von x endlich und kontinuierlich ist, für $x = \infty$ aber unendlich wird. Ein zweites partikuläres Integral dieser Gleichung hat die Form[68]):

$$(31)\qquad h P^n(x) \int_x^\infty \frac{dx}{(x^2-1) P^n(x) P^n(x)}.$$

Dasselbe ist daher für $x = \pm 1$ logarithmisch unendlich und verschwindet für $x = \infty$. Man nennt dies zweite Integral, wenn man noch $h = +1$ setzt, die *Kugelfunktion zweiter Art* und bezeichnet diese Funktion mit $Q^n(x)$. Für $Q^n(x)$ erhält man aus (31) die Reihe:

$$(31a)\quad \left\{ \begin{aligned} Q^n(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} \Big\{ & x^{-(n+1)} + \frac{(n+1)(n+2)}{2 \cdot (2n+3)} x^{-(n+3)} \\ & + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2 \cdot 4 \cdot (2n+3)(2n+5)} x^{-(n+5)} + \cdots \Big\}, \end{aligned} \right.$$

68) Vgl. *N. H. Abel*, J. f. Math. 2 (1827), p. 22; *Abel*'s Werke 1, p. 251; ferner *Euler*, Instit. calcul. integr. 2, sect. I, cap. IV. — S. auch die Habilitationsschrift von *G. Bauer*.

eine Reihe, die für $|x|>1$ konvergiert. Man erhält dieselbe Reihe auch neben $P^n(x)$, wenn man der Gleichung (2) durch eine nach absteigenden Potenzen von x fortschreitende Reihe zu genügen sucht. Das Bildungsgesetz der Reihe (31a) ist dasselbe wie das der Reihe (4), wenn man in letzterer $-(n+1)$ an Stelle von n setzt. Dieselbe Reihe ergiebt sich auch, wenn man $\frac{1}{x-y}$ nach steigenden Potenzen von $\frac{y}{x}$ entwickelt, die einzelnen Potenzen von y mittelst der Formel (13) durch Kugelfunktionen ausdrückt und die Kugelfunktionen mit gleichem Index vereinigt[69]), und zwar wird

$$\frac{1}{x-y}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P^n(y)Q^n(x), \tag{32}$$

eine Reihe, die zu ihrer Gültigkeit erfordert, dass $\text{Mod}\,(y-\sqrt{y^2-1})>\text{Mod}\,(x-\sqrt{x^2-1})$ ist, wobei x und $\sqrt{x^2-1}$, ebenso y und $\sqrt{y^2-1}$ dasselbe Vorzeichen erhalten[70]).

20. Das F. Neumann'sche Integral für Q^n. Aus (32) ergiebt sich für $Q^n(x)$ das *F. Neumann*'sche Integral[71]):

$$Q^n(x)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{P^n(y)\,dy}{x-y}, \tag{33}$$

von dem sich, wie es *Neumann* tut, auch direkt zeigen lässt, dass es der Gleichung (2) genügt, und dass daher seine Gültigkeit nicht, wie bei der Reihe (31a), auf $|x|>1$ beschränkt ist, dass es vielmehr die Funktion $Q^n(x)$ für beliebige x, mit Ausnahme allein der reellen echt gebrochenen x, darstellt. Aus (33) folgt folgende Darstellung[72]):

---

69) *Heine*, J. f. Math. 42 (1851), p. 72.

70) Beweise für die letzte Behauptung von *Heine* (H. B., erste Auflage); *Thomé*, J. f. Math. 66 (1868), p. 337, und *Laurent*, J. de math. (3) 1 (1875), p. 373. Der *Laurent*'sche Beweis ist in der zweiten Aufl. von *Heine*'s H. B. 1, p. 197, reproduziert. — *C. Neumann* bringt Gl. (32) mit einem bekannten Satze von *Cauchy* in Verbindung und leitet daraus die Entwicklung einer Funktion nach Kugelfunktionen erster und zweiter Art her, vgl. die oben zitierte Monographie, Halle 1862.

71) *F. Neumann*, J. f. Math. 37 (1848), p. 21. — Vgl. auch *F. Neumann*, Beiträge 1; *F. Neumann*, Vorles. über Potential, p. 311. Die *Neumann*'sche Funktion $Q_n(x)$ ist das *Doppelte* der *Heine*'schen Funktion $Q^n(x)$, da in der *Neumann*'schen Definition der Faktor $\frac{1}{2}$ fehlt.

72) Diese Darstellung findet sich, mit $t=\frac{1-x}{2}$ als unabhängiger Variabler, schon bei *R. Murphy*, Cambr. Trans. 5_3 (1835), p. 338.

$$(34) \qquad Q^n(x) = \frac{1}{2} P^n(x) \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - R_n(x),$$

wo $R_n(x)$ eine ganze rationale Funktion von x ist vom Grade $n-1$, ferner $R_0 = 0$, $R_1 = 1$. Die Ergänzungsfunktion R_n hat *E. Christoffel* in eine nach den Kugelfunktionen P^{n-1}, P^{n-3},... fortschreitende Reihe entwickelt, *Schläfli* und *Hermite*[73]) finden dafür die Reihe

$$(34a) \qquad R_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} P^{\nu-1}(x) P^{n-\nu}(x).$$

Die Gleichung (34), deren Gültigkeit für beliebige x sich aus der Differentialgleichung (2) ergiebt, zeigt das Verhalten von $Q^n(x)$ bei Umkreisung der singulären Punkte ± 1. Um für $Q^n(x)$ einen eindeutigen Wert zu erhalten, denkt sich *Heine*[74]) die Punkte $x = +1$ und $x = -1$ durch einen Querschnitt verbunden und definiert $Q^n(x)$ so, dass für reelle $x > 1$ der reelle Wert des Logarithmus zu nehmen ist, während für Punkte des Querschnitts $Q^n(x)$ die halbe Summe der Werte darstellt, die sie hätte, wenn das Argument das eine Mal eine positive, das andere Mal eine negative halbe Drehung um 1 aus jenem Hauptwerte macht. Diese Festsetzung hält *Schläfli*[75]) mit Recht für unzulässig, weil die so definierte Funktion der Differentialgleichung (2) in der Umgebung des Querschnittes nicht genügen würde.

Mittelst des *Neumann*'schen Integrals ergeben sich für $Q^n(x)$ teils genau dieselben Rekursionsformeln wie für $P^n(x)$, teils ganz analoge. Speziell gilt die erste Gleichung (14) und die Gleichung (15a) in Nr. **6** auch für Q^n; doch tritt an Stelle der zweiten Gleichung (14) die Gleichung

$$(35) \qquad Q^1(x) - xQ^0(x) + 1 = 0.$$

Ferner folgen aus (33), resp. (34) die Werte von $Q^n(0)$, resp. von $\left(\frac{dQ^n(x)}{dx}\right)$ für $x = 0$ etc.[76]).

---

73) Vgl. die bei Nr. **6** citierten Arbeiten von *Christoffel*. — *Schläfli*, Kugelff. m. bel. Par., p. 61; *Hermite*, Teixeira Jornal de Scien. math. 6 (1884), p. 81.

74) *Heine*, H. B. 1, p. 128; *Heine*'s Festsetzung kommt darauf hinaus, dass für reelle x zwischen -1 und $+1$

$$Q^n(x) = \frac{1}{2} P^n(x) \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - R^n(x)$$

ist.

75) *Schläfli*, Kugelff. m. bel. Par., p. 26.

76) *F. Neumann*, Beiträge, p. 64 ff. Dort sind auch rekurrente Relationen für die Funktion R_n (s. 34a), sowie solche zwischen den P einerseits, den Q andererseits angegeben.

21. Entwicklung von Q^n nach steigenden Potenzen. Eine nach steigenden Potenzen von x fortschreitende, für $|x|<1$ konvergierende Reihe erhält man mittelst der Differentialgleichung (2). Man kann nämlich dieser Gleichung auch durch die folgenden beiden Reihen genügen, deren eine abbricht, die andere für $|x|<1$ konvergiert:

$$(36)\quad \begin{cases} M = 1 - \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 - \cdots \\ \qquad = F\left(-\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right), \\ N = x - \frac{(n-1)(n+2)}{2\cdot 3}x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 - \cdots \\ \qquad = xF\left(-\frac{n-1}{2}, \frac{n+2}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right). \end{cases}$$

Dann ist für *gerade* n:[77])

$$(36a)\quad \begin{cases} P^n(x) = (-1)^{\frac{1}{2}n}\frac{1\cdot 3\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdots n}M, \\ Q^n(x) = (-1)^{\frac{1}{2}n}\frac{2\cdot 4\cdots n}{1\cdot 3\cdots(n-1)}N - \frac{1}{2}P^n(x)\lg(-1), \end{cases}$$

für ungerade n dagegen:

$$(36b)\quad \begin{cases} P^n(x) = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\frac{1\cdot 3\cdots n}{2\cdot 4\cdots(n-1)}N, \\ Q^n(x) = (-1)^{\frac{1}{2}(n+1)}\frac{2\cdot 4\cdots(n-1)}{1\cdot 3\cdots n}M - \frac{1}{2}P^n(x)\lg(-1). \end{cases}$$

22. Integraldarstellung von Q^n. Von anderen Reihen für $Q^n(x)$ erwähnen wir noch eine nach Potenzen von $x - \sqrt{x^2-1}$; ferner für $x = \cos\vartheta$ eine nach Kosinus der Vielfachen von ϑ fortschreitende, sowie verschiedene Darstellungen in Form hypergeometrischer Reihen[78]). Durch bestimmte Integrale lässt sich Q^n ausser durch (33) u. a. noch folgendermassen darstellen:

$$(37)\quad Q^n(x) = \int_0^\infty \frac{du}{\left[x + \cos(iu)\sqrt{x^2-1}\right]^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}\int_{-1}^{+1}\frac{(1-f^2)^n df}{(x-f)^{n+1}}.$$

Das erste dieser Integrale gilt für beliebige x; nur ist $\sqrt{x^2-1}$ für reelle x mit demselben Vorzeichen zu nehmen wie x; das zweite Integral gilt nicht für reelle gebrochene x.

Auch die Frage ist untersucht, welches die erzeugende Funktion für

---

77) *Heine*, H. B. 1, p. 147; *F. Neumann*, Beiträge, p. 57.

78) Über diese Reihen und Integrale vgl. *Heine*, H. B. 1, Teil I, Kap. 3. Das zweite der Integrale (37) findet sich bei *Laurent* in der Nr. 5 und Nr. 19 citierten Arbeit. — Andere Integrale giebt *Schläfli*, Kugelff. m. bel. Par.

$Q^n(x)$ ist, d. h. welche Funktion an Stelle von (3) treten muss, damit bei der Entwicklung nach Potenzen von α die $Q^n(x)$ statt der $P^n(x)$ als Koeffizienten auftreten[79]). Angenäherte Ausdrücke der $Q^n(x)$ für sehr grosse n findet man bei *Heine* und *Stieltjes*[80]). Die Lage der Wurzeln der Gleichung $Q^n(x) = 0$ ist von *Hermite* und *Stieltjes* erörtert[81]). Ferner hat *Hargreaves*[82]) noch die Werte der Integrale

$$\int_0^1 [Q^n(x)]^2\,dx, \quad \int_1^\infty [Q^n(x)]^2\,dx, \quad \int_0^1 Q^n(x)\,P^n(x)\,dx$$

bestimmt.

23. Zusammenhang zwischen Kugelfunktionen und Kettenbrüchen. Endlich ist der folgende Zusammenhang zwischen Kugelfunktionen und Kettenbrüchen zu erwähnen. Entwickelt man den Ausdruck $\frac{1}{2}\lg(x+1) - \frac{1}{2}\lg(x-1)$ in einen Kettenbruch, so sind Zähler und Nenner des n^{ten} Näherungsbruches die mit dem Faktor $(1\cdot 2\cdots n):(1\cdot 3\cdots(2n-1))$ multiplizierten Funktionen $R_n(x)$ (Nr. **20**) und $P^n(x)$. Ferner ist $Q^n(x):P^n(x)$ der Unterschied zwischen der zu entwickelnden Funktion und dem genannten Näherungsbruche[83]).

24. Zugeordnete Funktionen der zweiten Art. Diese Funktionen hängen mit $Q^n(x)$ in derselben Weise zusammen wie die Zugeordneten der ersten Art mit $P^n(x)$; und zwar definiert *Heine*[84])

$$(38)\qquad Q_\nu^n(x) = (x^2-1)^{\frac{1}{2}\nu}(-1)^\nu \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{(n+\nu)!}\frac{d^\nu Q^n(x)}{dx^\nu},$$

während *F. Neumann*[85])

$$(38\text{a})\qquad Q_{n\nu}(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}\nu}\frac{d^\nu Q_n(x)}{dx^\nu} = \nu!\,(-1)^\nu(1-x^2)^{\frac{1}{2}\nu}\int_{-1}^{+1}\frac{P^n(y)\,dy}{(x-y)^{\nu+1}}$$

setzt, so dass

$$(38\text{b})\qquad Q_{n\nu}(x) = (-1)^{\frac{3}{2}\nu}\frac{(n+\nu)!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}\cdot 2\cdot Q_\nu^n(x)$$

---

79) *Heine*, H. B. 1, p. 134; *Schläfli*, Kugelff. m. bel. Par., p. 61; *Beltrami*, Lomb. Rend. (2) 20 (1887), p. 469.

80) *Heine*, H. B. 1, p. 175 ff.; *Th. Stieltjes*, Par. C. R. 110 (1890), p. 1026; Toul. Ann. 4 (1890), p. 1.

81) Beide Arbeiten in den Toul. Fac. Ann. 4, 1890.

82) Lond. math. Proc. 29 (1898), p. 115—123.

83) Diese Sätze finden sich, wenn auch nicht dem Wortlaut, doch der Sache nach bei *C. F. Gauss*, Comm. Gott. 3 (1816), Werke 3, p. 163.

84) *Heine*, H. B. 1, p. 210.

85) *F. Neumann*, Beiträge, p. 2; J. f. Math. 37 (1848), p. 22. — Der Faktor 2 in (38b) kommt daher, dass die *Neumann*'sche Funktion Q_n das Doppelte der *Heine*'schen Funktion Q^n ist.

ist. $Q_\nu^n(x)$ genügt derselben Differentialgleichung wie $P_\nu^n(x)$ [Gl. (19) in Nr. 8], und zwar ist, falls $\nu \leqq n$, $Q_\nu^n(x)$ ein solches partikuläres Integral jener Gleichung, das für $x = \pm 1$ unendlich wird, für $x = \infty$ verschwindet, während $P_\nu^n(x)$ für alle endlichen x endlich war, für $x = \infty$ aber unendlich.

Indem wir hinsichtlich verschiedener Reihenentwicklungen und Integraldarstellungen auf *Heine*'s H. B. 1, hinsichtlich der Rekursionsformeln sowie spezieller Werte von $Q_\nu^n(x)$ auf *F. Neumann*'s oben zitierte Schriften verweisen, erwähnen wir, dass sich mittelst der Funktion Q_ν^n ein Additionstheorem[86]) für die Funktion Q^n aufstellen lässt, ähnlich dem Additionstheorem für P^n (vgl. Nr. **13**).

Die Entwicklung von $1 : (x - y)$ nach P_ν^n und Q_ν^n hat *F. Lindemann*[87]) aufgestellt. Er findet u. a. die merkwürdige Integralformel:

$$\int_{-1}^{+1} P_\nu^n(x)\, Q_\mu^n(x)\, \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi .$$

25. Zugeordnete, deren Nebenindex den Hauptindex übersteigt. Bei den Zugeordneten erster Art ist durch die Definition (s. Gl. (17) in Nr. 8) der Nebenindex ν auf Werte beschränkt, die den Hauptindex n nicht übersteigen. Denn für $\nu > n$ wird die ν^{te} Ableitung von P^n gleich Null, während die ν^{te} Ableitung von Q^n nicht verschwindet. Diese Bemerkung führt darauf, die Integrale der Gleichung (19) (in Nr. 8) auch für Werte von $\nu > n$ zu untersuchen. Diese Untersuchung ist in *F. Neumann*'s Beiträgen durchgeführt[88]). Indem *Neumann* das Integral von (19) in eine nach fallenden Potenzen von $x - 1$ fortschreitende Reihe entwickelt, die mit dem Faktor $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}\nu}$ multipliziert ist, findet er, dass (19) *nur für den Fall* $\nu \leqq n$ ein partikuläres Integral $P_\nu^n(x)$ besitzt, das in den beiden singulären Punkten

86) *Heine,* H. B. 1, p. 332. — Vgl. *C. Neumann,* Leipz. Abh. 1886, wo das Additionstheorem auf komplexe Werte des Arguments ausgedehnt wird. Übrigens hängt das Additionstheorem der Q^n schon mit den in Nr. **25** zu besprechenden erweiterten Q_ν^n zusammen.

87) *Lindemann,* Math. Ann. 19 (1882), p. 323.

88) Auch *Heine* betrachtet die Zugeordneten für $\nu > n$. Doch erwähnt er nirgends, worauf es doch wesentlich ankommt, dass für diesen Fall das Verhalten der partikulären Integrale der Differentialgleichung (19) ein anderes ist als für den Fall $\nu \leqq n$. Diesen Unterschied hat zuerst *F. Neumann* in seinen Beiträgen klar hervorgehoben. *Neumann* verdankt man die systematische Durchführung des Falles $\nu > n$, wie auch die Einführung der Funktionen $S_{n\nu}$, $T_{n\nu}$. — Geometrische Darstellungen dieser Funktionen, sowie der P_ν^n und Q_ν^n giebt für reelle Argumente *R. Olbricht,* s. Anmerkung 36).

$x = +1$ und $x = -1$ endlich bleibt und für $x = \infty$ unendlich wird, während das zweite partikuläre Integral $Q_\nu^n(x)$ für $x = \pm 1$ unendlich wird und für $x = \infty$ verschwindet; dass dagegen für $\nu > n$ die partikulären Integrale von (19) eine wesentlich andere Beschaffenheit haben. Hier existieren zwei partikuläre Integrale $S_{n\nu}(x)$ und $T_{n\nu}(x)$, deren erstes für $x = -1$ verschwindet und für $x = +1$ unendlich wird, während das zweite umgekehrt für $x = +1$ verschwindet und für $x = -1$ unendlich wird. Ausserdem werden beide noch unendlich für $x = \infty$. Die konstanten Faktoren dieser Integrale bestimmt *Neumann* so, dass

$$Q_{n\nu}(x) = S_{n\nu}(x) - T_{n\nu}(x)$$

wird, dass daher $S_{n\nu} - T_{n\nu}$ für $x = \infty$ verschwindet.

In Form von Integralen lassen sich $S_{n\nu}$ und $T_{n\nu}$ $(\nu > n)$ so darstellen:

$$S_{n\nu}(x) = (-1)^\nu \nu!\,(1 - x^2)^{\frac{1}{2}\nu} \int_\infty^1 \frac{P^n(z)\,dz}{(x-z)^{\nu+1}}, \tag{39}$$

während in $T_{n\nu}$ nur -1 an Stelle von $+1$ obere Grenze wird.

Wegen anderer Integraldarstellungen und Reihenentwicklungen der Funktionen $S_{n\nu}$, $T_{n\nu}$ (auch Reihen nach steigenden Potenzen von x), vgl. *F. Neumann*'s Beiträge.

VI. Erweiterungen.

26. Kugelfunktionen, deren Index eine beliebige Zahl ist. Man kann den Begriff der Kugelfunktionen dahin erweitern, dass man statt einer ganzen Zahl eine beliebige Zahl als Index nimmt. Gelegentlich weist *Heine*[89]) auf derartige Erweiterungen hin. Systematisch sind die einfachen Kugelfunktionen für beliebige Indices von *Schläfli* untersucht[90]), der den Index als Parameter bezeichnet. *Schläfli* definiert die Kugelfunktionen erster und zweiter Art für jeden reellen oder komplexen Wert des Index durch ausnahmslos gültige Integrale im komplexen Gebiete und leitet daraus durch blosse Addition von Integrationswegen die hauptsächlichsten Relationen zwischen den Kugelfunktionen her. Er stellt $P^\alpha(x)$ durch zwei verschiedene Integrale dar, eines im einblätterigen t-Felde, das andere im zweiblätterigen s-Felde:

89) *Heine*, H. B. 1, z. B. p. 37, wo das *Laplace*'sche Integral als Definition von P^n für beliebige n dient.

90) *Schläfli*, Kugelff. m. bel. Par., s. das Verz. der Monographieen.

$$(40)\qquad \begin{cases} \text{I.}\quad P^a(x) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int \frac{1}{2^a}\frac{(t^2-1)^a}{(t-x)^{a+1}}\,dt, \\ \text{II.}\quad P^a(x) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int s^a\frac{ds}{w}, \quad (w^2 = s^2 - 2sx + 1). \end{cases}$$

Der Weg des ersten Integrals ist für $|x| > 1$ ein mit dem Radius $\sqrt{x^2-1}$ um x beschriebener rechtläufiger Kreis, der Weg des zweiten Integrals ist eine Doppelgerade, die von $x+\sqrt{x^2-1}$ zu $x-\sqrt{x^2-1}$ und zurück läuft; dabei hat aber w beim Hin- und Rückgang entgegengesetzte Vorzeichen. Aus (40) folgt:

$$(40a)\qquad P^a(x) = P^{-(a+1)}(x).$$

Für $Q^a(x)$ werden die folgenden Formeln aufgestellt:

$$(41)\qquad \begin{cases} \text{I.}\quad Q^a(x) = \dfrac{1}{2i\sin(\pi a)}\displaystyle\int 2^a\frac{(x-t)^a}{(t^2-1)^{a+1}}\,dt, \\ \text{II.}\quad Q^a(x) = \dfrac{1}{2i\sin(\pi a)}\displaystyle\int \frac{1}{2^{a+1}}\frac{(t^2-1)^a}{(x-t)^{a+1}}\,dt. \end{cases}$$

Der Integrationsweg bei I geht in einer schleifenförmigen Kurve mit Doppelpunkt rechtläufig um x und rechtläufig um das endliche Gebiet; bei II ist der Weg einer Lemniscate ähnlich, geht rechtläufig um -1, rückläufig um $+1$.

Zwischen den Funktionen P und Q findet *Schläfli* die Beziehung:

$$(42)\qquad P^a(x) = \frac{\operatorname{tg}(\pi a)}{\pi}\left\{Q^a(x) - Q^{-(a+1)}(x)\right\}.$$

Hinsichtlich der weiteren sich hieran knüpfenden Entwicklungen muss auf *Schläfli* verwiesen werden, nur zweierlei mag noch erwähnt werden: 1) dass *Schläfli* auch die Analoga der Reihen (36) und der Beziehungen (36a) und (36b) in Nr. **21**) für beliebige a aufstellt; 2) dass er bei der Betrachtung der Zugeordneten dem zweiten Index ν nur ganzzahlige Werte beilegt.

Die Funktionen P_ν^n, in denen n und ν beliebige Werte haben, sind neuerdings von *E. W. Hobson*[91]) untersucht und durch komplexe Integrale dargestellt.

Bei diesen Erweiterungen handelt es sich um Eigenschaften, die den Kugelfunktionen eigentümlich sind, nicht um solche, die sie mit anderen hypergeometrischen Reihen gemein haben. Als spezielle Fälle der *Riemann*'schen P-Funktion behandelt *R. Olbricht* die P_ν^n und Q_ν^n, bei denen beide Indizes beliebig sind[36]).

27. Ringfunktionen. Wegen ihrer Anwendung in der Potentialtheorie gewähren noch gewisse Arten der Kugelfunktionen mit nicht

91) *Hobson*, Lond. Trans. 187 A (1896), p. 443.

ganzzahligem Index ein besonderes Interesse. Hierher gehören vor allem die *Ringfunktionen*, englisch toroidal functions. Sie können definiert werden als Kugelfunktionen, deren Index die Hälfte einer ungeraden ganzen Zahl ist, d. h. als Integrale derjenigen Differentialgleichung, die aus (2) entsteht, wenn man $n(n+1)$ durch $n^2 - \frac{1}{4}$ ersetzt (n eine ganze Zahl). Die erste Untersuchung dieser Funktionen rührt von *C. Neumann*[92]) her; ferner finden sich dieselben in einer nachgelassenen Arbeit *B. Riemann*'s[93]). Doch treten in beiden Arbeiten nicht die Analogien mit den Kugelfunktionen deutlich hervor. Auf diese ist u. a. von *A. Wangerin*[94]) hingewiesen, dann von *E. Heine* und *W. M. Hicks*[95]). Andere Untersuchungen rühren von *H. Hübschmann*[96]) her, der jedoch die vorhergehende Litteratur nicht berücksichtigt, sowie von *A. Basset*[97]). Verallgemeinerungen der Ringfunktionen hat *L. Gegenbauer*[98]) betrachtet.

Wie bei den Kugelfunktionen kann man *zonale* und *sektorielle* Ringfunktionen unterscheiden. Die letzteren sind Lösungen der Gleichung (1) (in Nr. **1**), wenn man darin $n(n+1)$ durch $n^2 - \frac{1}{4}$ ersetzt; sie sind Produkte von $\cos(\nu\omega)$, resp. $\sin(\nu\omega)$ und der Funktion

$$(43) \qquad P_\nu^{n-\frac{1}{2}}(x) = \frac{(-1)^\nu \Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n-\nu+\frac{1}{2})} \int_0^\pi \frac{\cos(\nu\varphi)\,d\varphi}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+\frac{1}{2}}}$$

(n und ν ganze Zahlen), resp. der Funktion $Q_\nu^{n-\frac{1}{2}}(x)$, die aus $P_\nu^{n-\frac{1}{2}}$ dadurch entsteht, dass der hyperbolische Kosinus an Stelle von $\cos\varphi$ tritt und für $\nu \leqq n$ die Grenzen des Integrals 0 und ∞ werden. Für $\nu = 0$ erhält man die zonalen Funktionen. Übrigens haben die Ringfunktionen mit den Kugelfunktionen die Eigenschaft gemein:

$$(44) \qquad \begin{cases} P_\nu^{n-\frac{1}{2}}(x) = (x^2-1)^{\frac{1}{2}\nu} \dfrac{d^\nu P_0^{n-\frac{1}{2}}(x)}{dx^\nu}, \\ Q_\nu^{n-\frac{1}{2}}(x) = (x^2-1)^{\frac{1}{2}\nu} \dfrac{d^\nu Q_0^{n-\frac{1}{2}}(x)}{dx^\nu}. \end{cases}$$

Die vorstehende, der Arbeit von *Basset*[99]) entnommene Dar-

92) *C. Neumann*, vgl. die Monographie von 1864.

93) *Riemann*, Werke, p. 407 (Leipzig 1876).

94) *Wangerin*, Archiv Math. 55, p. 113; Progr. Berl. 1873.

95) *Heine*, H. B. 2, p. 283 ff. — *Hicks*, Lond. Trans. 171, 1882.

96) *Hübschmann*, Progr. Chemnitz 1889.

97) *A. Basset*, Amer. J. of Math. 15 (1893), p. 287. — Vgl. auch *W. D. Niven*, Lond. math. Proc. 24 (1893), p. 372—386; ferner *J. R. Schuetz*, allgemeine Lösung der Magnetisierungsgleichungen für den Ring, Preisschrift, München 1894.

98) *Gegenbauer*, Wien. Ber. 100 (1891), p. 745.

99) Die Bezeichnung der Funktionen ist bei *Basset* eine etwas andere; in

stellung von $P_\nu^{n-\frac{1}{2}}(x)$ unterscheidet sich von der *Heine*'s, der übrigens für $Q_\nu^{n-\frac{1}{2}}$ noch eine andere Integraldarstellung giebt, durch einen konstanten Faktor. Natürlich lassen sich die Ringfunktionen auch als hypergeometrische Reihen darstellen, es bestehen für sie Rekursionsformeln, die denen der Kugelfunktionen ähnlich sind etc. Von den letzterwähnten Formeln mag die folgende, für die Anwendungen wichtige, noch Erwähnung finden:

$$(45)\quad \frac{dP_\nu^{n-\frac{1}{2}}(x)}{dx}\, Q_\nu^{n-\frac{1}{2}}(x) - P_\nu^{n-\frac{1}{2}}(x)\, \frac{dQ_\nu^{n-\frac{1}{2}}(x)}{dx} = \frac{(-1)^\nu (n+\nu)!}{(n-\nu)!\,(x^2-1)}.$$

28. Mehler's Kegelfunktionen. Eine andere Klasse der für die Anwendungen wichtigen Erweiterungen der Kugelfunktionen bilden die *Kegelfunktionen*, conal harmonics. Auf die Notwendigkeit der Einführung von Kugelfunktionen mit komplexen Indices $-\frac{1}{2} + i\mu$ (μ beliebig) haben schon *Thomson* und *Tait* hingewiesen[100]); die wirkliche Darstellung verdankt man *F. G. Mehler*[101]), der auf diese Funktionen geführt wurde durch die Entwicklung der reziproken Entfernung eines Punktes innerhalb einer Kegelfläche von einem auf der Axe gelegenen Punkte. *Mehler* definiert die Kegelfunktion durch die Gleichung:

$$(46)\quad K^\mu(\cos\vartheta) = \frac{2\cos(\mu\pi i)}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(\mu\alpha)\,d\alpha}{\sqrt{2[\cos(\alpha i) + \cos\vartheta]}} = P_{i\mu-\frac{1}{2}}(\cos\vartheta).$$

K^μ genügt der Gleichung (2a) in Nr. 2, wenn man in derselben $n(n+1)$ durch $-(\mu^2 + \frac{1}{4})$ ersetzt. Das allgemeine Integral jener Gleichung ist

$$(46a)\qquad AK^\mu(\cos\vartheta) + BK^\mu(-\cos\vartheta),$$

und zwar entspricht $K^\mu(-\cos\vartheta)$ der Kugelfunktion zweiter Art. Ferner ist

$$(47)\qquad \frac{1}{x-y} = \pi \int_0^\infty d\mu\, \frac{\mu \operatorname{tg}(\mu\pi i)}{i\cos(\mu\pi i)}\, K^\mu(x) K^\mu(-y),$$

woraus folgt:

$$(47a)\qquad K^\mu(-y) = \frac{\cos(\mu\pi i)}{\pi} \int_1^\infty \frac{K^\mu(x)\,dx}{x-y}.$$

---

der Bezeichnung folge ich *Heine*, doch unterscheidet sich, wie schon oben bemerkt, das *Heine*'sche $P_\nu^{n-\frac{1}{2}}$ von dem obigen um einen konstanten Faktor.

100) *Thomson* und *Tait*, Th. Ph. 1, p. 170.

101) *F. G. Mehler*, J. f. Math. 68 (1868), p. 134; Progr. Gymn. Elbing 1870, abgedr. Math. Ann. 18 (1881), p. 161. — Vgl. übrigens *Heine*, H. B. 1, p. 300; 2, p. 219 ff.

Mehler giebt noch andere Integraldarstellungen der Kegelfunktionen, sowie verschiedene Reihen für dieselben, endlich auch das Additionstheorem dieser Funktionen.

29. Adjungierte Kegelfunktionen. *C. Neumann*[102]), der die Funktion $K^\mu(-y)$ mit $L_\mu(y)$ bezeichnet, leitet eine Reihe der *Mehler*schen Formeln auf anderem Wege her und fügt neue Formeln hinzu, z. B. die Entwicklung von $K^\mu(\cos\vartheta)$ nach Kugelfunktionen $P^n(\cos\vartheta)$. Er führt ferner die *„adjungierten" Kegelfunktionen*

$$(48)\quad K_{\mu j}(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}j}\,\frac{d^j K^\mu(x)}{dx^j},\quad L_{\mu j}(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}j}\,\frac{d^j L_\mu(x)}{dx^j}$$

ein und giebt mit Hilfe derselben dem Additionstheorem eine Form, die dem Additionstheorem der Kugelfunktionen analog ist. Die adjungierten Kegelfunktionen sind dann von *G. Leonhardt*[103]) weiter behandelt, der auch folgende, der *Laplace*'schen Funktion $Y_n(\vartheta, \omega)$ analoge Funktion einführt:

$$Y_q(\mu, \omega) = \sum_{j=0}^{\infty} K_{qj}(\mu)[\alpha_j \cos(j\omega) + \beta_j \sin(j\omega)].$$

Für sie gilt, falls $\cos\gamma$ dieselbe Bedeutung hat, wie in Nr. **13** (Gl. (26)), der Integralsatz:

$$(49\,\text{a})\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} L_q(\cos\gamma) Y_\varrho(\mu, \omega)\, d\mu\, d\omega \\ \qquad = \frac{4}{q^2-\varrho^2}\,[Y_\varrho(\mu_1, \omega_1)\cos(q\pi i) - Y_q(\mu_1, \omega_1)\cos(\varrho\pi i)]. \end{cases}$$

30. Entwicklung einer Funktion nach Kegelfunktionen. Von Interesse ist *Mehler*'s Darstellung einer Funktion $f(\vartheta, \varphi)$ durch Kegelfunktionen:

$$(50)\quad f(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty d\mu\,\mu\,\frac{1}{i}\,\operatorname{tg}(\mu\pi i)\int_0^\infty d\vartheta'\,\frac{1}{i}\sin(i\vartheta')\int_0^{2\pi} K^\mu(z) f(\vartheta', \varphi')\, d\varphi',$$

worin

$$z = \cos(\vartheta i)\cos(\vartheta' i) + \sin(\vartheta i)\sin(\vartheta' i)\cos(\varphi - \varphi')$$

ist. Diese Darstellung gilt unter der Bedingung, dass die Funktion f von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \infty$ und von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ gegeben ist, nirgends unendlich wird und für $\vartheta = \infty$ stärker gegen Null konvergiert als die $(-\frac{1}{2})^{\text{te}}$ Potenz von e^ϑ. Ist die Funktion $f(\vartheta, \varphi)$ in der Umgebung des Punktes ϑ, φ vieldeutig, so stellt die rechte Seite

102) *C. Neumann*, Math. Ann. 18 (1881), p. 195.
103) *G. Leonhardt*, Math. Ann. 19 (1882), p. 578.

von (50) einen gewissen Mittelwert dar. — Hier tritt ein charakteristischer Unterschied gegen die Kugelfunktionen hervor. Dort war der Index n auf ganze Zahlen beschränkt, die Darstellung einer Funktion durch Kugelfunktionen erforderte nur eine Summe von Kugelfunktionen, während hier eine Integration über alle möglichen Werte des Index μ nötig ist[104]).

31. Funktionen, die aus der Entwicklung von $(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\nu}$ entstehen. Eine von vielen Autoren behandelte Erweiterung der Kugelfunktionen ergiebt sich, wenn man statt des Ausdrucks (3) in Nr. 2 den Ausdruck

$$(51) \qquad (1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\nu}$$

nach Potenzen von α entwickelt. Der Koeffizient $C_n^{\nu}(x)$ von α^n enthält einerseits die Kugelfunktion $P^n(x)$ als speziellen Fall, andererseits besitzt er viele der Kugelfunktion analoge Eigenschaften. Beiläufig ist diese Entwicklung in *Jacobi*'s nachgelassener Arbeit über die hypergeometrische Reihe erwähnt[105]). Am ausführlichsten sind die C_n^{ν} von *L. Gegenbauer*[106]) behandelt.

Die Funktion C_n^{ν} genügt der Differentialgleichung

$$(52) \quad (1-x^2)\frac{d^2C_n^{\nu}}{dx^2}-(2\nu+1)x\frac{dC_n^{\nu}}{dx}+n(n+2\nu)C_n^{\nu}=0.$$

Für C_n^{ν} gelten Integralsätze analog denen der Kugelfunktionen, z. B. tritt an Stelle der Gleichung (12) in Nr. 6 folgende:

$$\int_{-1}^{+1} C_n^{\nu}(x)C_m^{\nu}(x)(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}dx = 0 \text{ für } m \gtrless n.$$

---

104) *Thomson* und *Tait*, Th. Ph. 1, p. 170, sprechen auch für imaginäre Indizes nur von Reihen von Kugelfunktionen, nirgends von einer Integraldarstellung wie in (50).

105) J. f. Math. 56 (1859), p. 149; Werke 6, p. 184. — Vgl. *Heine*, H. B. 1, p. 297 u. p. 451 ff., ferner *M. Koppe*, Progr. Berl. 1877; *G. Darboux*, J. de math. (3) 4 (1878), p. 377.

Schon bei *Murphy*, Cambr. Trans. 5_3 (1835), p. 322, treten die C_n^{ν} auf, aber als Entwicklungskoeffizienten einer komplizierteren erzeugenden Funktion. — Auf die Rolle dieser Funktionen für die mechanische Quadratur hat zuerst *Mehler* aufmerksam gemacht, J. f. Math. 63 (1864), p. 152.

Über die Entwicklung des Ausdrucks (51), falls darin $x=\cos\vartheta$ gesetzt wird, nach Kosinus der Vielfachen von ϑ existiert eine ausgedehnte Litteratur, vgl. das Referat von *H. Burkhardt*, D. M.-V. 10 (1901), § 17 u. 19.

106) Wien. Ber. 70, 1874; 75, 1877; 97, 1888; 102, 1893; Wien. Denkschr. 48, 1884. — Übrigens hat noch eine Reihe anderer Autoren Untersuchungen über die Funktionen C_n^{ν} veröffentlicht, ohne sich um die darüber vorhandene Litteratur zu kümmern.

Ferner ergiebt sich ein zweites partikuläres Integral der Gleichung (52) bei der Entwicklung von $(y - x)^{-2\nu}$ nach Funktionen C_n^ν, und zwar ist dasselbe der Koeffizient von $2(n + \nu)C_n^\nu(x)$. — Auch ein Additionstheorem existiert für die C_n^ν, das dem Additionstheorem der Kugelfunktionen analog ist[107]). Indem wir hinsichtlich der verschiedenen Reihen, in welche sich diese Funktionen entwickeln lassen, auf die Arbeiten von *L. Gegenbauer* verweisen, erwähnen wir noch, dass von Rekursionsformeln nicht nur solche zwischen Funktionen mit demselben ν, aber verschiedenen n existieren, sondern auch solche für verschiedene ν. Die einfachste der letzteren ist:

$$2\nu C_{n-1}^{\nu+1}(x) = \frac{dC_n^\nu(x)}{dx}; \tag{53}$$

vermöge derselben lassen sich alle C_n^ν auf solche reduzieren, für die ν zwischen 0 und 1 liegt[108]).

32. Fall, in dem ν ein Vielfaches von $\frac{1}{2}$ ist. Kugelfunktionen höherer Ordnung. Ein besonderes Interesse gewähren die Fälle der Funktionen C_n^ν, in denen ν ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}$ oder eine ganze Zahl ist. Im ersten dieser beiden Fälle lassen sich nach (53) die C_n^ν durch Differentialquotienten von Kugelfunktionen ausdrücken, unterscheiden sich also von den zugeordneten Kugelfunktionen nur durch eine Potenz von $(1 - x^2)$ und einen konstanten Faktor. Falls aber ν eine ganze Zahl ist, lassen sich die Funktionen C_n^ν auf die Funktion

$$C_n^1 = \frac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin\vartheta}, \quad (x = \cos\vartheta), \tag{54}$$

zurückführen, resp. auf die Funktion

$$C_n^0 = \frac{\cos(n\vartheta)}{n}, \tag{54a}$$

die bei der Entwicklung von $-\lg(1 - 2\alpha\cos\vartheta + \alpha^2)$ als Koeffizient von $2\alpha^n$ entsteht.

Die Funktionen C_n^ν für ganzzahlige ν oder für $\nu =$ ungeraden Vielfachen von $\frac{1}{2}$, die *Heine*[109]) als *Kugelfunktionen höherer Ordnung*

---

107) *Heine*, J. f. Math. 62 (1863), p. 127. — *L. Gegenbauer*, Wien. Ber. 70 (1874), p. 443; 102 (1893), p. 942. — Betreffs der Rekursionsformeln der C_n^ν vgl. *R. Most*, J. f. Math. 70 (1869), p. 163.

108) *S. Pincherle* [Bol. Mem. (5) 1, 1891] hat die Funktionen untersucht, die aus der Entwicklung von

$$\frac{1}{\sqrt{t^3 - 3tx + 1}}$$

nach steigenden Potenzen von t entstehen.

109) *Heine*, H. B. 1, p. 299, 451 ff.

bezeichnet, kommen noch in einem anderen Zusammenhange vor. Betrachtet man nämlich statt der *Laplace*'schen Gleichung $\Delta\varphi = 0$ die Gleichung, die im Raume von $(p+1)$ Dimensionen an deren Stelle auftritt[110]), so tritt an Stelle der Gleichung (1a) in Nr. **1** eine allgemeinere, die von p variabeln Winkeln abhängt, ϑ und $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{p-1}$; und zwar hängen diese mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$ eines Raumpunktes durch die Gleichungen zusammen:

$$x_1 = r\cos\vartheta, \quad x_2 = r\sin\vartheta\cos\varphi_1, \quad x_3 = r\sin\vartheta\sin\varphi_1\cos\varphi_2,$$
$$x_4 = r\sin\vartheta\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3, \cdots, \tag{54b}$$
$$x_{p+1} = r\sin\vartheta\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{p-1}.$$

Für den Fall, dass die gesuchte Funktion φ von den Winkeln $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{p-1}$ unabhängig ist, d. h. für den Fall der Symmetrie um eine Axe, ist φ gleich der Funktion C_n^ν für $\nu = \frac{p-1}{2}$. Sucht man ohne die Annahme der Symmetrie um eine Axe diejenige homogene ganze Funktion der Richtungskosinus, die im Raume von $p+1$ Dimensionen der erweiterten Gleichung $\Delta\varphi = 0$ genügt, so ergeben sich die Kugelfunktionen von p Variabeln oder die *Laplace*'schen Funktionen höherer Ordnung. Diese Funktionen sind zuerst von *A. Cayley*[111]) behandelt; sodann kommen sie in verschiedenen Arbeiten von *Heine* über *Lamé*'sche Funktionen vor[112]); endlich sind hier Abhandlungen von *F. G. Mehler*, *C. Neumann* und *V. Giulotto* zu erwähnen[113]).

VII. Lamé'sche Funktionen.

33. Definition. Lamé'sche Differentialgleichung. Diese Funktionen spielen bei den auf das dreiaxige Ellipsoid bezüglichen Aufgaben der mathematischen Physik dieselbe Rolle, wie die Kugelfunktionen bei den entsprechenden Aufgaben der Kugel. Sie treten auch in den auf die

110) Die in Rede stehende Funktion φ ist das Potential einer anziehenden Masse in jenem Raume, falls die Anziehung der p^{ten} Potenz der Entfernung umgekehrt proportional ist.

111) J. de math. 13, 1848.

112) J. f. Math. 60, 61, 62 (1862 u. 1863).

113) *Mehler*, Progr. Danzig 1864 u. J. f. Math. 66 (1866), p. 161. — *C. Neumann*, Zeitschr. Math. Phys. 12 (1867), p. 116; hier findet sich die Bezeichnung *Ultrakugelfunktionen*. — *V. Giulotto*, Gior. d. Mat. 39 (1901), p. 162.

Aus den obigen Erörterungen ist ersichtlich, dass es unzweckmässig ist, die Funktionen C_n^ν für *beliebige* ν als „hypersphärische" Funktionen zu bezeichnen, wie es *Letnikoff* (Mosk. Math. Sammlung 1885, vgl. Fortschr. d. Math. 1885) tut, oder als Kugelfunktionen höherer Ordnung, wie *F. Büttner*, Festschr. Wernigerode 1900, oder als Kugelfunktionen schlechtweg, wie *N. Nielsen* in seinem Handbuch der Cylinderfunktionen, 1904.

Kugel bezüglichen Aufgaben auf, sobald man das Koordinatensystem der konfokalen spärischen Kegelschnitte benutzt [vgl. die Formeln (55)]. *Lamé* wurde bei der Untersuchung des stationären Wärmezustandes eines Ellipsoids[114]) zunächst auf die elliptischen Koordinaten geführt, auf die unabhängig von *Lamé* auch *C. G. J. Jacobi*[115]) gelangt ist, sodann durch die Untersuchung der auf elliptische Koordinaten transformierten Gleichung $\Delta V = 0$ auf die in Rede stehenden Funktionen. Weiter ausgebildet ist die Theorie namentlich durch *E. Heine*[116]), der gleichzeitig mit *J. Liouville*[117]) die *Lamé*'schen Funktionen zweiter Art einführte, und in neuerer Zeit durch *F. Klein* und seine Schüler (vgl. Nr. **41, 42**).

Der Zusammenhang der *Lamé*'schen Funktionen mit den Kugelfunktionen tritt am deutlichsten zu Tage, wenn man mit *Liouville*[117]) die *Lamé'sche Funktion mit zwei Parametern* (ellipsoidal harmonic) als diejenige Funktion definiert, in welche die allgemeine Kugelfunktion (vgl. Nr. **1**) übergeht, falls man die Richtungskosinus ξ, η, ζ durch elliptische Kugelkoordinaten ausdrückt, d. h. falls man die Gleichung (1) oder (1a) in Nr. **1** auf zwei neue Variabele μ, ν transformiert, die mit $\zeta = \cos\vartheta$ und ω durch die Gleichungen zusammenhängen:

$$(55)\quad \begin{cases} \zeta = \cos\vartheta = \dfrac{\mu\nu}{bc}, \quad \eta = \sin\vartheta\cos\omega = \dfrac{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}}{b\sqrt{c^2-b^2}}, \\ \xi = \sin\vartheta\sin\omega = \dfrac{\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}}, \\ c^2 > \mu^2 > b^2 > \nu^2 > 0.^{118}) \end{cases}$$

Die transformierte Gleichung (1) oder (1a) lautet[119]):

$$(56)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial\varepsilon^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\varkappa^2} + (\mu^2-\nu^2)n(n+1)\varphi = 0,$$

wo

$$(56a)\qquad \varepsilon = \int_b^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}}, \quad \varkappa = \int_0^{\nu} \frac{d\nu}{\sqrt{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}}.$$

114) J. de math. 2, 4, 8, sowie Par. sav. étr. 5; J. éc. polyt. cah. 23. — Vgl. auch *Lamé*, Fonctions inverses, Paris 1857.

115) *Jacobi*, J. f. Math. 19 (1839), p. 309; Werke 2, p. 57.

116) *Heine*, J. f. Math. 29 (1845), p. 185.

117) *Liouville*, Par. C. R. 20 (1845), p. 1386, 1609; J. de math. 10 (1845), p. 222.

118) μ, ν sind die Parameter zweier konfokalen Kegelscharen.

119) Die transformierte Gleichung ergiebt sich am einfachsten, wenn man die rechtwinkligen Koordinaten durch r, μ, ν ausdrückt, $\Delta\varphi = 0$ auf diese Variabeln transformiert und $\varphi = r^n\varphi_1$ setzt; vgl. *Liouville*, J. de math. 11 (1846), p. 458; *Heine*, H. B. 1, p. 354.

Der Gleichung (56) genügt der Ausdruck $\varphi = E(\mu)E(\nu)$, falls die Faktoren den Gleichungen genügen:

$$(57)\qquad \begin{cases} \frac{d^2E(\mu)}{d\varepsilon^2} + [n(n+1)\mu^2 - h]E(\mu) = 0, \\ \frac{d^2E(\nu)}{d\varkappa^2} - [n(n+1)\nu^2 - h]E(\nu) = 0, \end{cases}$$

deren erste in algebraischer Form lautet:

$$(57\,a)\qquad (\mu^2-b^2)(\mu^2-c^2)\frac{d^2E(\mu)}{d\mu^2} + \mu(2\mu^2-b^2-c^2)\frac{dE(\mu)}{d\mu} + [h - n(n+1)\mu^2]E(\mu) = 0.$$

Die Funktionen $E(\mu)$, $E(\nu)$ sind die *Lamé'schen Funktionen mit einem Parameter*, jede der Gleichungen (57), resp. (57 a) heisst die *Lamé*'sche *Differentialgleichung*.

34. Darstellung der vier Klassen von Lamé'schen Funktionen erster Art. Nach der Definition (vgl. Nr. **1**) muss das Produkt $E(\mu)E(\nu)$ nicht nur der Gleichung (56) genügen, sondern ausserdem eine ganze Funktion n^{ten} Grades von $\mu\nu$, $\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}$, $\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}$ sein. Man hat somit nur eine solche Lösung von (57 a) zu suchen, die eine ganze Funktion n^{ten} Grades von μ, $\sqrt{\mu^2-b}$, $\sqrt{c^2-\mu^2}$ ist. Derartiger Lösungen existieren nun vier Typen, sämtlich bis auf die Faktoren $\sqrt{\mu^2-b^2}$, $\sqrt{\mu^2-c^2}$ [120]) ganze Funktionen von μ. Es sind die folgenden:

$$(58)\qquad \begin{cases} K(\mu) = a_0\mu^n + a_1\mu^{n-2} + a_2\mu^{n-4} + \cdots, \\ L(\mu) = \sqrt{\mu^2-b^2}(a_0\mu^{n-1} + a_1\mu^{n-3} + \cdots), \\ M(\mu) = \sqrt{\mu^2-c^2}(a_0\mu^{n-1} + a_1\mu^{n-3} + \cdots), \\ N(\mu) = \sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\mu^2-c^2}(a_0\mu^{n-2} + a_1\mu^{n-4} + \cdots). \end{cases}$$

Setzt man zunächst den ersten der Ausdrücke (58) in (57 a) ein, so erhält man zwischen je drei aufeinander folgenden Koeffizienten a eine Rekursionsformel; und für $\sigma = \frac{1}{2}n$ oder $\sigma = \frac{1}{2}(n-1)$ verschwindet in der zwischen $a_{\sigma+2}$, $a_{\sigma+1}$ und a_σ bestehenden Rekursionsformel der Koeffizient von a_σ von selbst. Bestimmt man jetzt die Konstante h so, dass der aus der vorhergehenden Rekursionsformel sich ergebende Wert von $a_{\sigma+1} = 0$ wird, so verschwinden auch alle folgenden Koeffizienten von selbst, und $K(\mu)$ ist eine ganze Funktion von μ. Die Gleichung für h ist vom Grade $\sigma+1$, ihre Wurzeln sind sämtlich reell und von einander verschieden [121]). Es giebt

120) Auf den Faktor $\sqrt{-1}$ kommt es nicht an.

121) *Liouville*, J. de math. **11** (1846), p. 221, beweist die Verschiedenheit

mithin $(\sigma + 1)$ von einander verschiedene ganze Funktionen von μ, die der Gleichung (57a) genügen.

Ähnlich verhält es sich mit den anderen Ausdrücken (58); auch für diese brechen die Reihen von selbst ab, sobald h jedesmal einer gewissen Gleichung genügt, die lauter reelle und von einander verschiedene Wurzeln hat. Diese Gleichung ist für L und M vom Grade $n - \sigma$, für N vom Grade σ. Mithin giebt es im Ganzen $(2n + 1)$ Funktionen $E(\mu)$, die der Gleichung (57a) genügen und ganze Funktionen n^{ten} Grades von μ, $\sqrt{\mu^2 - b^2}$, $\sqrt{\mu^2 - c^2}$ sind. Ferner hat in den beiden Gleichungen (57), denen die Faktoren des Produktes $E(\mu)E(\nu)$ genügen müssen, h denselben Wert; in keinem Produkte kommen also zwei Funktionen E mit verschiedenen Werten von h als Faktoren vor, und da die sämtlichen in Frage kommenden Konstanten h von einander verschieden sind, so existieren genau $(2n + 1)$ Produkte $E(\mu)E(\nu)$, die allen Forderungen genügen. Die allgemeinste *Lamé*'sche Funktion n^{ten} Grades mit zwei Parametern erhält man, wenn man alle verschiedenen Produkte mit willkürlichen Konstanten multipliziert und addiert. Die allgemeine *Lamé*'sche Funktion enthält also, ebenso wie die allgemeine Kugelfunktion (*Laplace*'sche Funktion), $(2n + 1)$ willkürliche Konstanten.

Bemerkt werden mag noch, dass man nach *Heine*[117]) $E(\mu)$ auch als ganze Funktion von $[\sqrt{\mu^2 - b^2} - i\sqrt{c^2 - \mu^2}] : \sqrt{c^2 - b^2}$ darstellen kann.

35. Die zugeordneten Kugelfunktionen als Grenzfälle der Lamé'schen Funktionen. Additionstheorem. Für den besonderen Fall $b = 0$ geht $E(\mu)$ in $P_m^n\left(\frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}}{c}\right)$, für $b = c$ geht $E(\nu)$ in $P_m^n\left(\frac{\nu}{b}\right)$ über. Die Produkte $E(\mu)E(\nu)$ gehen im letzteren Falle, falls man noch, ehe $b = c$ gesetzt ist, $\sqrt{c^2 - \mu^2} = \sqrt{c^2 - b^2}\cos\omega$, ferner $\nu = b\cos\vartheta$ setzt, in

$$P_m^n(\cos\vartheta)\cos(m\omega), \text{ resp. } P_m^n(\cos\vartheta)\sin(m\omega)$$

über, und ähnlich für $b = 0$.

Ferner lassen sich, wenn b beliebig ist und zwischen ϑ, ω einer-

---

der Wurzeln; dass dieselben reell sind, hat schon *Lamé* gezeigt. — Für komplexe Werte von b und c kann die Gleichung eine Doppelwurzel haben. Welche Funktionen dann an Stelle der ausfallenden Funktionen treten, ist von *Fr. Cohn* untersucht, Diss. Königsb. 1888.

122) *Heine*, H. B. 1, p. 371. — Über die Darstellung der *Lamé*'schen Funktionen mittelst *Cartesischer* Koordinaten vgl. *W. D. Niven*, Lond. Trans. 182A (1891), p. 231.

seits, μ, ν andererseits die Relationen (55) bestehen, die einzelnen *Lamé*'schen Produkte durch lineare homogene Funktionen von

$$P_m^n(\cos\vartheta)\cos(m\omega), \text{ resp. } P_m^n(\cos\vartheta)\sin(m\omega)$$

darstellen, und umgekehrt, und zwar hat n in den *Lamé*'schen Produkten und den Kugelfunktionen denselben Wert. Dabei kommen, wenn E von dem Typus K (Gl. 58) ist, in $E(\mu)E(\nu)$ nur Kosinus der geraden Vielfachen von ω, für den Typus L nur Kosinus der ungeraden Vielfachen, für den Typus M nur Sinus der ungeraden Vielfachen, für N endlich nur Sinus der geraden Vielfachen vor[123]). — Auch die Funktion $P^n(\cos\gamma)$, wo $\cos\gamma$ den Ausdruck (26) in Nr. **13** bezeichnet, lässt sich in eine endliche Summe von *Lamé*'schen Produkten entwickeln[124]):

$$(59) \qquad P^n(\cos\gamma) = \frac{\pi}{2(2n+1)} \sum_{s=0}^{2n} E_s^n(\mu)E_s^n(\nu)E_s^n(\mu_1)E_s^n(\nu_1).$$

Dabei beziehen sich die Indices s der Funktionen E auf die verschiedenen Parameter h; μ, ν hängen mit ϑ, ω, μ_1, ν_1 mit ϑ_1, ω_1 durch die Gleichungen (55) zusammen.

36. Wurzeln der Gleichung $E(\lambda) = 0$. Die Wurzeln der Gleichung $E(\lambda) = 0$ sind sämtlich reell und liegen zwischen $\lambda = 0$ und $\lambda = c$.[125]) Über die Verteilung der Wurzeln dieser Gleichung auf die Intervalle 0 bis b und b bis c hat *F. Klein*[126]) folgenden Satz aufgestellt: Sondert man in $E(\lambda)$ die etwa darin enthaltenen, einfach auftretenden Faktoren $\sqrt{\lambda^2}$, $\sqrt{\lambda^2 - c^2}$, $\sqrt{\lambda^2 - b^2}$ ab, so bleibt eine ganze Funktion von λ^2, $\varphi_\tau(\lambda^2)$, übrig, deren Grad mit τ bezeichnet werden möge; und für jeden der obigen vier Typen von E (Gl. 58) existieren $\tau + 1$ verschiedene Funktionen E, resp. φ_τ. Dann tritt von den $\tau + 1$ Möglichkeiten, die man rein kombinatorisch für die Verteilung von τ Grössen auf zwei Intervalle erhält, je eine bei je einer, aber nur bei einer der erwähnten $\tau + 1$ *Lamé*'schen Funktionen ein, so dass die verschiedenen Funktionen und die verschiedenen Verteilungsweisen der Wurzeln einander eindeutig entsprechen. Es ergiebt sich dies durch Betrachtung der Kurven der Kugel, auf denen die Produkte $E(\mu)E(\nu)$ verschwinden, resp. der Kugelkreise, in welche die erwähnten Kurven für $b = c$ übergehen. Mit 0, b, c fällt keine Wurzel von $\varphi_\tau(\lambda^2)$ zusammen.

123) *Heine*, H. B. 1, p. 375 ff. — Wie man umgekehrt von den Kugelfunktionen zu den *Lamé*'schen Funktionen übergehen kann, ist von *G. H. Darwin* gezeigt, Lond. Trans. 197 A (1901), p. 461—557.

124) *Heine*, H. B. 1, p. 430—432.

125) *Liouville*, J. de math. 11 (1846), p. 161.

126) *F. Klein*, Math. Ann. 18 (1881), p. 237.

37. Entwicklung einer Funktion nach Lamé'schen Produkten. Die Entwicklung einer Funktion von μ, ν nach *Lamé*schen Produkten kann man mit *Liouville*[117]) aus der Entwicklung nach Kugelfunktionen ableiten. Drückt man nämlich in Gl. (29) in Nr. **15** ϑ, ω mittelst der Gl. (55) durch $\mu, \nu, \vartheta_1, \omega_1$ durch μ_1, ν_1 aus und setzt für $P^n(\cos\gamma)$ den Ausdruck (59), so gelangt man zu dem Resultat:

$$(60)\quad \begin{cases} F(\mu,\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n, \\ X_n = \frac{2(2n+1)}{\pi} \int_0^{\tilde{\omega}} d\varkappa_1 \int_0^{\omega} F(\mu_1,\nu_1)\, P^n(\cos\gamma)(\mu_1^2 - \nu_1^2) d\varepsilon_1, \end{cases}$$

wo für $P^n(\cos\gamma)$ der Ausdruck (59) zu setzen ist. Die Bedeutung von $\tilde{\omega}$ und ω wird sogleich erläutert werden.

Unabhängig von der Entwicklung nach Kugelfunktionen ergiebt sich die Entwicklung nach *Lamé*schen Produkten auch mittelst des folgenden Integralsatzes[127]). Nimmt das Integral ε (Gl. (56a)) für die obere Grenze c den Wert ω, das Integral $\varkappa$ für die obere Grenze b den Wert $\tilde{\omega}$ an, so ist

$$(61)\qquad \int_0^{\tilde{\omega}} d\varkappa \int_0^{\omega} (\mu^2 - \nu^2) E_s^m(\mu) E_s^m(\nu) E_\tau^n(\mu) E_\tau^n(\nu) d\varepsilon = 0,$$

falls entweder $m \gtrless n$, oder auch, falls für $m = n$ $s \gtrless \tau$ ist. Dabei bezeichnen m, resp. n den Hauptparameter, s, resp. τ dagegen den Parameter h. — Für $m = n$, $s = \tau$ ist der Wert des Integrals von Null verschieden, und zwar enthält derselbe keine höheren Transcendenten als π.

Untersuchungen über die Konvergenz der durch direkte Anwendung von (61) erhaltenen Reihen sind, freilich in anderem Zusammenhange und auf etwas allgemeinerer Grundlage, insofern Funktionen E betrachtet werden, bei denen an Stelle der ganzen Zahl n ein beliebiger Parameter auftritt (s. Nr. **41**), von *Ch. Jaccottet*[128]) angestellt, gestützt auf die asymptotische Darstellung der Funktionen E für grosse Werte des Parameters, eine Darstellung, die es ermöglicht, eine obere Grenze für diese Funktionen abzuleiten.

38. Die Lamé'schen Funktionen zweiter Art. Die Aufgaben der Potentialtheorie erfordern neben der Betrachtung der Funktion E die eines zweiten partikulären Integrals F der Gleichungen (57), resp.

127) *Lamé*, J. de math. 4 (1839), p. 158.
128) *Ch. Jaccottet*, Diss. Göttingen 1895.

(57a), nämlich eines solchen Integrals, das im Unendlichen verschwindet, das sich also zu E ebenso verhält, wie die Kugelfunktion zweiter Art Q zu der erster Art P. *Heine*, der gleichzeitig mit *Liouville* dieses zweite partikuläre Integral näher untersucht hat[129]), bezeichnet dasselbe als „*Lamé'sche Funktion zweiter Art*" und stellt es sowohl durch Doppel-, als durch einfache Integrale dar. Letztere Darstellung lautet, falls E der Klasse K (Gl. (58)) angehört:

$$(62) \qquad F(\varrho) = \varrho\sqrt{\varrho^2 - c^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}\left[\alpha\int_0^{\omega}\frac{K(\mu)d\mu}{\varrho^2-\mu^2} - \beta\int_0^{\omega'}\frac{K(\nu)d\nu}{\varrho^2-\nu^2}\right].$$

Darin bezeichnen α und β gewisse Konstanten. Aus (62) folgt für F eine Darstellung ähnlich der Gl. (34) für Q^n, wobei an Stelle des Logarithmus in (34) elliptische Integrale erster und zweiter Gattung treten (resp. volle elliptische Integrale dritter Gattung). Mit der Kettenbruchentwicklung eines vollen elliptischen Integrals dritter Gattung kann man die Funktionen E und F daher ebenso in Verbindung bringen, wie P und Q mit der Kettenbruchentwicklung von $\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$[130]).

F. Lindemann[131]) hat $F(z)$ in eine nach steigenden oder nach steigenden und fallenden Potenzen von $(\sqrt{z^2-b^2}-\sqrt{z^2-c^2}):\sqrt{c^2-b^2}$ fortschreitende Reihe entwickelt, den Konvergenzbereich dieser Reihen bestimmt und überhaupt die Werte der Funktion für komplexe Werte von z genauer untersucht, insbesondere auch ihr Verhalten bei Umkreisung der singulären Punkte. Weiter hat *Lindemann* die Entwicklung von $\frac{1}{z_1-z}$ nach *Lamé*'schen Funktionen $K^{(n)}$ und $F^{(n)}$ und daraus mittelst des *Cauchy*'schen Satzes die einer analytischen Funktion $f(z)$ nach den $K^{(n)}$ und $F^{(n)}$ innerhalb gewisser Flächenstücke abgeleitet. Für manche Flächenstücke ergeben sich verschiedenartige Entwicklungen. Endlich hat er gezeigt, dass es möglich ist, die Null durch Reihen darzustellen, die nach *Lamé*'schen Funktionen fortschreiten; und zwar schreiten diese Reihen teils nach den K, teils nach den F, teils nach K und F fort. Die erstgenannten sind teils innerhalb gewisser Kurven gültig, teils in der ganzen Ebene; die Entwicklungen nach den F allein gelten für alle Punkte ausserhalb gewisser Kurven, die letztgenannten Reihen für gewisse ringförmige Flächenstücke. Endlich existieren auch Null-

129) Vgl. Anmerkung 116) und 117).

130) *Heine*, J. f. Math. 60, 1862; Berl. Ber. 1866, p. 446; J. f. Math. 67 (1867), p. 315.

131) *F. Lindemann*, Math. Ann. 19 (1882), p. 323.

entwicklungen, die nur längs einer Linie gelten. In besonderen Fällen lassen sich die betreffenden Formeln auf die *Legendre*'sche Relation zwischen den Periodizitätsmoduln elliptischer Integrale reduzieren.

39. Hinweis auf Hermite's Untersuchungen betreffs der Lamé-schen Gleichung. Die *Lamé*'sche Differentialgleichung (57a) lässt sich auf die Form bringen:

$$\frac{d^2y}{du^2} = [n(n+1)k^2\mathrm{sn}^2u + h]y, \tag{57b}$$

wo sn die Funktion sinus amplitudo bezeichnet. Im Vorstehenden sind die Integrale dieser Gleichung untersucht unter der Voraussetzung, dass eines derselben eine ganze Funktion von sn$u$ ist; und das ist der Fall, wenn h entsprechend bestimmt wird. *Ch. Hermite*[132]) hat an (57b) eine neue Aufgabe geknüpft, nämlich das allgemeine Integral dieser Gleichung für den Fall zu bestimmen, dass h beliebig ist, während n noch eine ganze Zahl bezeichnet. Betreffs dieser Untersuchungen und der sich daran anschliessenden verweisen wir auf die Artikel: Lineare Differentialgleichungen und elliptische Funktionen.

40. Lamé'sche Funktionen höherer Ordnung[133]). Ist

$$du = \frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{x(x-a_1)\cdots(x-a_p)}} = \frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}}, \tag{63}$$

so ist jede ganze Funktion von $\sqrt{x}$, $\sqrt{x-a_1}$, $\cdots$, $\sqrt{x-a_p}$, welche einer Differentialgleichung von der Form:

$$\frac{d^2W}{du^2} + \vartheta(x)\,W = 0 \tag{63a}$$

genügt, eine *Lamé*'sche Funktion erster Art, p^{ter} Ordnung und n^{ten} Grades. $\vartheta(x)$ ist dabei eine ganze Funktion von x von der Beschaffenheit, dass (63a) eine Lösung zulässt, die eine ganze Funktion von x ist. $\vartheta(x)$ ist vom Grade $p-1$. Die Anzahl der verschiedenen Funktionen ϑ und damit die Anzahl der verschiedenen *Lamé*'schen Funktionen, die zu gegebenen Werten von n und p gehören, ist genau so gross wie die Anzahl der willkürlichen Konstanten in der

132) *Hermite,* Sur quelques applications des fonctions elliptiques, Par. C. R. 85 (1877), p. 689, 728, 821 ff.; auch sep. Paris 1885.

133) *Heine,* J. f. Math. 60, 61, 62, (1862 u. 1863); Berl. Ber. 1864; H. B. 1, p. 445 ff. — Übrigens sind die *Lamé*'schen Funktionen mit einer beliebigen Zahl von Veränderlichen schon von *G. Green* behandelt, Camb. Trans. 5 (1835), papers p. 185, und zwar ohne Benutzung verallgemeinerter elliptischer Koordinaten; nur die durch die Gleichungen (54b) und definierten Variabeln werden gelegentlich benutzt. — Vgl. auch *Cayley*, Lond. Trans. 165 (1875).

allgemeinsten homogenen Funktion n^{ten} Grades W von den $p+1$ Variabeln $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{p+1}$, welche der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_{p+1}^2} = 0$$

genügt.

Alle diese Funktionen lassen sich auf die Form bringen:

$$\sqrt{\psi_1}\, V_1, \quad \sqrt{\psi_2}\, V_2, \cdots,$$

wo $V_1, V_2, \cdots$ ganze Funktionen von x sind, $\psi_1, \psi_2, \cdots$ alle möglichen ganzen Funktionen, die $\psi(x)$ teilen, 1 und $\psi(x)$ selbst eingeschlossen. — Die von *Lamé* eingeführten Funktionen ergeben sich für $x = \mu^2$ und $p = 2$, sie sind also von der zweiten Ordnung.

Die Differentialgleichung (63a) besitzt noch ein zweites partikuläres Integral, das im Unendlichen verschwindet und, nach absteigenden Potenzen von x entwickelt, mit der $-(n+p-1)^{\text{ten}}$ Potenz von $\sqrt{x}$ beginnt.

Lässt man von den Konstanten $a_1, a_2, \cdots$ einige gleich werden, so erhält man die „*speziellen Lamé*'schen Funktionen" p^{ter} Ordnung; sind $a_1, a_2, \cdots, a_p$ einander gleich, so entstehen die Kugelfunktionen höherer Ordnung (s. Nr. **32**). Wie die letztgenannten Funktionen, treten auch die *Lamé*'schen Funktionen bei den Potentialaufgaben im Raume von $p+1$ Dimensionen auf, und zwar dann, wenn man die Koordinaten eines Punktes durch die Parameter der p-fachen Mannigfaltigkeiten ausdrückt, die den konfokalen Flächen zweiter Ordnung im Raume von drei Dimensionen entsprechen.

41. Erweiterung des Begriffs der Lamé'schen Funktionen. Die Aufgaben der Potentialtheorie für die Rotationscykliden führen auf eine Differentialgleichung, die sich von der *Lamé*'schen im wesentlichen nur darin unterscheidet, dass an Stelle einer ganzen Zahl n die Hälfte einer ungeraden Zahl als Parameter auftritt[134]). Noch allgemeinere Werte des Parameters sind zu betrachten bei den Aufgaben der Potentialtheorie, bei denen es sich nicht um volle Ellipsoide handelt, sondern um Körper, die begrenzt sind von je zwei Flächen einer Schar der drei Scharen konfokaler Flächen zweiter Ordnung. Solche verallgemeinerte *Lamé*'sche Differentialgleichungen sind zuerst

134) *A. Wangerin*, Jablon. Preisschr. 1875, sowie Berl. Ber. 1878, p. 152. Dort ist die Aufgabe nur bis zur Aufstellung der gewöhnlichen Differentialgleichung durchgeführt. — *Häntzschel* giebt in seiner Monographie einige Resultate betreffs des funktionentheoretischen Verhaltens der Integrale jener Differentialgleichung und erörtert namentlich ihren Zusammenhang mit den speziellen Funktionen, die als besondere Fälle auftreten.

von *F. Klein*[135]) behandelt, der den folgenden Satz (*Oscillationstheorem*) aufgestellt hat. Ist

$$(64) \qquad t = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}, \quad f(x) = (x-a)(x-b)(x-c),$$

so giebt es stets ein und nur ein Wertepaar der Parameter A, B der *Lamé*'schen Gleichung

$$(64a) \qquad \frac{d^2E}{dt^2} = (Ax + B)E$$

von der Beschaffenheit, dass eine erste Partikularlösung dieser Gleichung existiert, welche an beiden Enden des Segmentes $a_1 \ldots a_2$ der x-Axe verschwindet und in diesem m Halboscillationen ausführt (d. h. m-mal verschwindet), und dass gleichzeitig eine zweite Partikularlösung existiert, welche an den beiden Enden eines zweiten Segmentes $b_1 \ldots b_2$ verschwindet und in diesem n Halboscillationen ausführt.

Die Näherungswerte dieser verallgemeinerten *Lamé*'schen Funktionen für grosse m, n sind in der schon unter Nr. **37** citierten Dissertation von *Jaccottet* untersucht; mittelst dieser Näherungswerte hat *Jaccottet* dann den Konvergenzbeweis für die Entwicklung einer Funktion zweier Variabeln nach Produkten solcher Funktionen geführt.

42. Die Lamé'schen Funktionen mit mehr als drei singulären Punkten im Endlichen. *F. Klein*[136]) hat später sein Oscillationstheorem auf den Fall ausgedehnt, dass die Differentialgleichung (64a) mehr als drei singuläre Punkte im Endlichen, d. h. dass die Funktion $f(x)$ in (64) mehr als drei Faktoren besitzt. Auf eine solche Gleichung wird man bei Behandlung der Potentialaufgaben für einen von Cykliden begrenzten Körper geführt[137]), und zwar hat $f(x)$ für diesen Fall fünf Faktoren. Das analoge Problem für einen n-fach ausgedehnten Raum führt auf den Fall, dass $f(x)$ $(n+2)$ Faktoren hat. An Stelle der Gleichung (64a) tritt dann die allgemeinere

$$(64b) \qquad \frac{d^2E}{dt^2} = \left\{ \frac{2-n}{16(n+1)} f''(x) + Ax^{n-2} + Bx^{n-3} + \cdots + N \right\} E;$$

135) *F. Klein,* Math. Ann. 18 (1881), p. 410; vgl. auch die Darstellung in *Klein*'s autogr. Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen, 1894, p. 276.

136) *F. Klein,* Gött. Nachr. 1890, p. 85; autogr. Vorl. über lin. Diffgl. 1894, p. 197, 401.

137) *A. Wangerin,* J. f. Math. 82 (1876), p. 145; *G. Darboux,* Par. C. R. 83 (1876), p. 1037, 1099. Sehr ausführlich ist die Potentialaufgabe für die von Cykliden begrenzten Körper auf Grund der *Klein*'schen Untersuchungen in der Monographie von *M. Bôcher* durchgeführt. Dort sind auch die wichtigsten geometrischen Eigenschaften der Cykliden abgeleitet und die verschiedenen Ausartungen erörtert.

und man kann über die $n-1$ Parameter $A, B, \ldots, N$ so verfügen, dass $n-1$ Partikularlösungen existieren, deren jede in einem auf der x-Axe gelegenen Segment je eine vorgeschriebene Anzahl von Nullstellen hat und in den Endpunkten des Segments verschwindet.

Auf die Funktion E fällt, wie *Klein* (l. c.) zeigt, ein neues Licht, wenn man dieselbe homogen macht, also

$$x = x_1 : x_2, \quad E(x) = x_2^{\frac{n-2}{4}} F(x_1, x_2), \quad f = (x_1 - e_1 x_2) \ldots (x_1 - e_{n+2} x_2)$$

setzt. F ist eine homogene Funktion von x_1, x_2 vom Grade $\frac{2-n}{4}$, die als „*Lamé'sche Form*" bezeichnet wird, und für die der Satz gilt, dass die zweite Überschiebung der Formen f und F gleich dem Produkte aus F und einer rationalen ganzen Funktion vom Grade $n-2$ ist, ein Resultat, das so einfach ist, dass es natürlich erscheint, dasselbe als Definition an die Spitze der Theorie der *Lamé*'schen Funktionen zu stellen. Die einzigen singulären Stellen der so definierten Funktion F sind die Wurzeln von $f = 0$, und zwar gehören, wenn alle Wurzeln verschieden sind, zu jeder einzelnen derselben die Exponenten $\frac{1}{2}$ und 0.

43. Funktionen des elliptischen Kegels. In derselben Art, wie von den Kugelfunktionen zu den *Mehler*'schen Kegelfunktionen (Nr. 28), wird man von den *Lamé*'schen Funktionen auf die „Funktionen des elliptischen Kegels" geführt, nämlich dadurch, dass man dem Index n den komplexen Wert $-\frac{1}{2} + ip$ (p beliebig) beilegt. Die Untersuchung dieser Funktionen ist von *E. W. Hobson* angebahnt[138]).

VIII. Cylinderfunktionen oder Bessel'sche Funktionen.

44. Differentialgleichung. Reihen und Integrale für die Funktionen erster Art. Diese Funktionen treten in den Aufgaben der mathematischen Physik auf, die sich auf den Rotationscylinder beziehen, ausserdem in den Aufgaben der Wärmeleitung in einer Kugel, in der Diffraktionstheorie und der Theorie der Störungen. Man sollte sie, streng genommen, zum Unterschiede von anderen, weiterhin zu besprechenden Funktionen (Nr. 62) *Funktionen des Kreiscylinders* nennen; doch ist es üblich, sie schlechtweg als Cylinderfunktionen oder als *Bessel*'sche Funktionen zu bezeichnen.

Gelegentlich kommen die einfachsten dieser Funktionen schon bei *Daniel Bernoulli* und *Euler* vor[139]); im neunzehnten Jahrhundert finden

138) *E. W. Hobson*, London Math. Proc. 23 (1892), p. 231.

139) *Daniel Bernoulli*, Comm. Petrop. 6 (1732/33) [38], p. 108 und 7 (1734/35)

sie sich zuerst bei *Fourier*, *Bessel* und *Poisson*[140]). *Heine* hat deshalb die Bezeichnung „*Fourier-Bessel*'sche Funktion" vorgeschlagen[141]), doch hat sich dieser Name nicht eingebürgert. Seit *Bessel* sind die Cylinderfunktionen Gegenstand zahlreicher Abhandlungen gewesen[142]), und es ist für dieselben eine sehr grosse Reihe von Formeln aufgestellt, von denen hier nur die wichtigsten erwähnt werden können.

Verschiedene Autoren sind bei ihren Untersuchungen von verschiedenen Gesichtspunkten ausgegangen. Am einfachsten definiert man die *Bessel*'sche Funktion erster Art der Ordnung n als dasjenige partikuläre Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0, \tag{65}$$

das für $x = 0$ endlich bleibt, und man bezeichnet dies Integral mit $J_n(x)$ oder $J^n(x)$[143]). In Gleichung (65), der *Bessel'schen Differentialgleichung*, soll der Index n zunächst eine beliebige positive Zahl sein[144]). Das gesuchte partikuläre Integral lässt dann sich durch die für alle x konvergente Reihe darstellen:

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n\,\Gamma(n+1)}\left\{1 - \frac{x^2}{2\cdot(2n+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot(2n+2)(2n+4)} - \cdots\right\} \tag{66}$$

oder auch durch das Integral:

$$J_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{x^n}{2^n\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}\int_0^{\pi}\cos(x\cos\varphi)\sin^{2n}\varphi\,d\varphi. \tag{66a}$$

---

[40], p. 162; *L. Euler*, Acta Petrop. 5 (1781) [84], p. 175. — Bei *Bernoulli*, ebenso auch bei *Fourier* kommen nur die Funktionen mit dem Index 0 vor.

140) *Fourier*, Théorie analytique de la chaleur 1822, p. 369. — *Bessel*, Berl. Abh. 1816/17, p. 49; ausführlicher ib. 1824. — *Poisson*, J. éc. pol., cah. 19 (1823), p. 249—403.

141) *Heine*, J. f. Math. 69 (1868), p. 128. — *Heine* selbst wendet später ausschliesslich den Namen Cylinderfunktionen an.

142) Ein Verzeichnis der Litteratur bis 1867 findet sich in der Monographie von *C. Neumann*, Leipzig 1867, eine bis 1878 reichendes bei *Heine*, H. B. 1, p. 189, ein weiteres bei *A. Gray* und *G. B. Mathews*, p. 289, das ausführlichste in *N. Nielsen*'s Handbuch, p. 389—404.

143) *Bessel*'s Bezeichnung lautet J^n_x, daneben kommt die Bezeichnung $J_{x,n}$ vor. — Handelt es sich um $J_0(x)$, so wird bisweilen der Index 0 fortgelassen. — Über den Zusammenhang der Differentialgleichung (65) mit der *Riccati*'schen Gleichung vgl. *Lommel*, Studien, § 31.

144) Vor *Lommel* (1868) (vgl. das Verzeichnis der Monographieen) hat man nur ganzzahlige Werte von n betrachtet. *Lommel* selbst betrachtet reelle Indizes n, die grösser sind als $-\frac{1}{2}$. Komplexe Werte des Index finden sich zuerst bei *H. Hankel*, Math. Ann. 1 (1869), p. 467. Anwendungen der *Bessel*'schen Funktionen mit imaginärem Index giebt *M. Bôcher*, Ann. math. 6 (1892), p. 137.

Neben diesen beiden für alle positiven n gültigen Formeln hat man für den besonders wichtigen Fall, dass n eine positive *ganze* Zahl oder Null ist, noch die folgende Integraldarstellung[145]):

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\omega - x\sin\omega)\,d\omega. \tag{67}$$

Aus (67) folgt sofort, dass $J_n(x)$ für ganzzahlige Werte des Index n stets zwischen -1 und $+1$ liegt.

Falls der Index n ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}$ ist, lässt sich die Reihe (66) in endlicher Form summieren[146]); man findet z. B.

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x, \quad J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right).$$

N. Nielsen benutzt neben der Reihe (66) die aus ihr folgende Potenzreihe für das Produkt zweier Cylinderfunktionen[147]).

45. Bessel'sche Funktionen zweiter Art nennen die meisten Autoren[148]) dasjenige partikuläre Integral der Gleichung (65), das für $x = 0$ unendlich wird. Ist n *keine* ganze Zahl, so erhält man das zweite Integral, indem man in der Reihe (66) n mit $-n$ vertauscht, und man bezeichnet diese Funktion mit $J_{-n}(x)$. Falls jedoch n eine ganze Zahl ist, ist $J_{-n}(x)$ im wesentlichen mit $J_n(x)$ identisch[149]), wie sich ergiebt, wenn man der Gleichung (65) durch eine nach steigenden Potenzen von x geordnete, mit x^{-n} beginnende Reihe zu genügen

145) Die Gleichung (67) bildet *Bessel's* ursprüngliche Definition; in der Reihe (66) ist der an sich willkürliche Faktor so gewählt, dass die Reihe für ganzzahlige n mit dem Integral (67) identisch ist. — Gleichung (66a) bildet den Ausgangspunkt in *Lommel's* Monographie, während *Graf* und *Gubler* von der Reihe (66) ausgehen. — *A. Sommerfeld* findet, unter Benutzung eines komplexen Integrationsweges, eine der Gleichung (67) analoge Darstellung für beliebige Werte des Index, Math. Ann. 47 (1896), p. 337; ein ähnliches Integral ist dort auch für die *Bessel'*schen Funktionen zweiter Art mitgeteilt.

146) Vgl. *S. D. Poisson*, J. éc. polyt., cah. 19 (1823), p. 293 und Théorie de la chaleur, p. 159; ferner *P. S. de Laplace*, Conn. des temps pour 1823 (1820) und Méc. cél. livre XI, Ch. IV (oeuvres 5).

147) Math. Ann. 52 (1899), p. 228, vgl. *Nielsen*, Handbuch, Kap. 1.

148) *C. Neumann* und *Schläfli* bezeichnen die Funktion Y als *„komplementäre Bessel'sche Funktion"*, während sie den Namen *Bessel'*sche Funktion zweiter Art auf eine andre Funktion anwenden (s. Nr. 54). Doch ist diese Bezeichnung nicht zweckmässig, auch nicht allgemein üblich.

149) Aus der Differentialgleichung ergiebt sich nur, dass $J_{-n}(x)$ bis auf einen konstanten Faktor mit $J_n(x)$ identisch ist. Damit die später zu besprechenden Rekursionsformeln auch für negative n gelten, muss man $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ setzen.

sucht. Die *Euler*'sche[150]) Methode, aus einem partikulären Integral einer Differentialgleichung zweiter Ordnung das andere zu bestimmen, führt zu dem Resultate, dass für ganzzahlige n die *Bessel*'sche Funktion zweiter Art Logarithmen enthalten muss. Für $n = 0$ und für ganzzahlige n ist diese Funktion zweiter Art zuerst eingehend von *C. Neumann* untersucht, der sie mit Y_0 bezeichnet, und zwar findet er[151]):

$$(68)\quad Y_0(x) = J_0(x)\log x + 2\{\tfrac{1}{1}J_2(x) - \tfrac{1}{2}J_4(x) + \tfrac{1}{3}J_6(x) - \tfrac{1}{4}J_8(x) + \cdots\},$$

wo die Reihe rechts für alle x konvergiert, ferner das Integral:

$$(68a)\qquad Y_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x \sin\omega)\log(4x\cos^2\omega)\,d\omega,$$

während die Funktion zweiter Art für andere ganzzahlige n sich aus $Y_0(x)$ mittelst der Formel[152]):

$$(68b)\qquad Y_n(x) = (-2x)^n \frac{d^n Y_0(x)}{(dx^2)^n}$$

ergiebt. Da zwischen $J_n(x)$ und $J_0(x)$ dieselbe Relation besteht, so folgt, dass $Y_n(x)$ gleich ist $J_n(x)\log x$, vermehrt um eine für alle x eindeutige und stetige Funktion, die sich analog (68) in eine nach Cylinderfunktionen fortschreitende Reihe entwickeln lässt; auch lässt sich diese Reihe in Form eines bestimmten Integrals darstellen[153]).

46. Ableitung dieser Funktionen aus denen erster Art durch einen Grenzübergang. Die Funktion $Y_n(x)$ lässt sich, wie zuerst *Hankel*[154]) gezeigt hat, durch einen Grenzübergang aus $J_n(x)$ ableiten, und zwar ist[155]):

$$(69)\quad Y_n(x) = \lim_{\varepsilon=0}\frac{1}{2\varepsilon}[J_{n+\varepsilon}(x) - (-1)^n J_{-(n+\varepsilon)}(x)] + [\log 2 + \Gamma'(1)]J_n(x),$$

wo $\Gamma'(1)$ die *Euler*'sche Konstante ist.

---

150) Vgl. Nr. **19**, Anm. 68.

151) *C. Neumann*, Bess. F., p. 44. — Das Integral (68a) findet sich schon bei *G. Stokes*, Cambr. Trans. 9 (1850); papers 3, p. 42.

152) *C. Neumann*, Bess. F., p. 54. Betr. dieser u. a. Rekursionsformeln vgl. Nr. **50**.

153) *Lommel*, Studien, p. 86 ff. — Betreffs andrer Formen dieser Reihe vgl. die in Nr. **46** zu citierenden Abhandlungen von *Hankel* und *Schläfli*.

154) *Hankel*, Math. Ann. 1 (1869), p. 467—501; vgl. Anm. 155).

155) *Schläfli*, Math. Ann. 3 (1871), p. 134. Die von *Hankel* mit Y_n bezeichnete Funktion ist mit der *Neumann*'schen Funktion Y_n nicht identisch, während in der von *Schläfli* aufgestellten Formel (69) Y_n die *C. Neumann*'sche Funktion ist.

47. Die Cylinderfunktionen als Grenzen der Kugelfunktionen. Einen merkwürdigen Zusammenhang zwischen Kugel- und Cylinderfunktionen hat *G. Mehler* entdeckt[156]). Es ist nämlich

$$\lim_{n=\infty} P^n\left(\cos\frac{\vartheta}{n}\right) = J_0(\vartheta). \tag{70}$$

Es ergiebt sich dies entweder aus der Darstellung von P^n als hypergeometrische Reihe, deren viertes Element $\sin^2\frac{\vartheta}{2n}$ ist, oder aus dem *Laplace*'schen Integral (Gl. (7) Nr. 5). *Heine*[157]) hat denselben Grenzübergang auf die zugeordneten Kugelfunktionen sowie auf die Kugelfunktionen zweiter Art angewandt. Indem er für die aus den Q^n oder Q_ν^n sich ergebenden Funktionen den Buchstaben K verwendet, findet er:

$$\left\{\begin{array}{c} \lim_{n=\infty} Q^n\left(\cos\frac{\vartheta}{n}\right) = K_0(\vartheta), \quad \lim\frac{2^n}{\sqrt{n\pi}}\, P_\nu^n\left(\cos\frac{\vartheta}{n}\right) = J_\nu(\vartheta), \\ \lim\frac{1}{2^{n+1}}\sqrt{\frac{\pi}{n}}\, Q_\nu^n\left(\cos\frac{\vartheta}{n}\right) = K_\nu(\vartheta). \end{array}\right. \tag{70a}$$

Da auch die Differentialgleichung der zugeordneten Kugelfunktionen [Gl. (19) in Nr. 8], wenn man das Argument $= \frac{\vartheta}{n}$ setzt und die Grenze für $n = \infty$ nimmt, in die Differentialgleichung der *Bessel*'schen Funktionen übergeht, so kann K_ν nur eine Verbindung von J_ν und Y_ν sein, und zwar ist[158]):

$$-K_0(\vartheta) = Y_0(\vartheta) - J_0(\vartheta)[\log 2 + \Gamma'(1)] = \lim_{\varepsilon=0}\frac{J_\varepsilon(\vartheta) - J_{-\varepsilon}(\vartheta)}{2\varepsilon} \tag{70b}$$

und ebenso

$$-K_\nu(\vartheta) = \lim_{\varepsilon=0}\frac{1}{2\varepsilon}[J_{\nu+\varepsilon}(\vartheta) - (-1)^\nu J_{-(\nu+\varepsilon)}(\vartheta)]. \tag{70c}$$

Man kann den Zusammenhang zwischen Kugel- und *Bessel*'schen Funktionen zur Grundlage der Theorie der letzteren machen, wie es namentlich *Heine* in seinem Handbuch tut. Mehr empfiehlt sich jedoch eine direkte Behandlung der *Bessel*'schen Funktionen.

Auch als Grenze der *Mehler*'schen Kegelfunktionen lassen sich die *Bessel*'schen Funktionen ableiten, noch allgemeiner als Grenzfall der *Riemann*'schen P-Funktion[159]).

156) *Mehler*, J. f. Math. 68 (1868), p. 140.

157) *Heine*, J. f. Math. 69 (1868), p. 128.

158) *H. Weber*, J. f. Math. 75 (1873), p. 85. Vgl. *Heine*, H. B. 1, p. 244.

159) *R. Olbricht*, Studien über die Kugel- und Cylinderfunktionen, Diss. Leipzig 1887, Leop. N. A. 52. — Dabei gelangt der Verf. auf Erweiterungen,

48. Integraldarstellungen der Funktionen zweiter Art. *Heine* findet für $K_0(\vartheta)$ das Integral:

$$K_0(\vartheta) = \int_0^\infty \cos(\vartheta \cos iu)\,du \tag{71}$$

und ein entsprechendes für $K_\nu(\vartheta)$. — Verschiedene reelle oder komplexe Integrale für J_n und Y_n, resp. K_n finden sich bei *Schläfli*[160]), *Hankel*[161]), *Heine*[162]), *H. Weber*[163]), *Sonine*[164]) und *Schafheitlin*[165]). Wir erwähnen unter diesen die *Schläfli*'sche Formel (a beliebig, reeller Teil von x positiv):

$$J_a(y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(y\sin\varphi - a\varphi)\,d\varphi - \frac{\sin(a\pi)}{\pi}\int_0^\infty e^{-y\,\mathfrak{Sin}\varphi - a\varphi}\,d\varphi, \tag{71a}$$

wo $\mathfrak{Sin}$ den hyperbolischen Sinus bezeichnet; die Formel von *Sonine*:

$$\left\{\begin{aligned} Y_0(x) &= -\int_0^\infty J_0(u)\,\frac{\cos(x+u)}{x+u}\,du = \\ &\quad -\int_0^\infty \frac{J_0(u)\,du}{x+u} + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin(x\cos\varphi)\,d\varphi, \end{aligned}\right. \tag{71b}$$

endlich die *Mehler*'sche Formel[166]):

$$K_0(i\vartheta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x J_0(x)\,dx}{x^2+\vartheta^2}. \tag{71c}$$

Übrigens mag bemerkt werden, dass *Schläfli* folgende Form der *Bessel*'schen Funktion zweiter Art (er nennt sie die komplementäre Funktion) betrachtet:

$$K_a(x) = \operatorname{cotg}(a\pi)J_a(x) - \frac{1}{\sin(a\pi)}J_{-a}(x). \tag{71d}$$

die er als Cylinderfunktionen höherer Ordnung bezeichnet. Ferner zeigt er, dass die Formeln (70) und (70a) sich auf beliebige Indizes der Kugel- und der Cylinderfunktionen ausdehnen lassen. Diese Ausdehnung findet sich auch bei *A. Sommerfeld,* Math. Ann. 47 (1896), p. 337 ff.

160) *Schläfli,* Ann. di mat. 1, 1868; Math. Ann. 3, 1871. Die Formel (71a) findet sich an beiden Stellen.

161) Math. Ann. 1 (1869), p. 467.

162) J. f. Math. 69 und H. B. 1.

163) J. f. Math. 69, 75, 76.

164) Math. Ann. 16 (1880), p. 1. In der Formel (71b) steht bei *Sonine* rechts noch der Faktor 2; aber sein Y_0 ist das Doppelte des *Neumann*'schen Y_0.

165) J. f. Math. 114 (1894), p. 31.

166) J. f. Math. 68; vgl. *Heine,* H. B. 1, p. 197.

N. Nielsen führt in seinem Handbuch neben J_ν und Y_ν noch die Funktionen

$$H^\nu(x) = J_\nu(x) \pm i\, Y_\nu(x)$$

ein.

49. Semikonvergente Reihen. Obwohl die Reihe (66) für alle x konvergiert, wird dieselbe doch zur Berechnung von $J_n(x)$ für grössere Werte von x unzweckmässig. Hier benutzt man besser die semikonvergente Entwicklung:

$$(72)\quad J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\cos\left(x - \frac{\pi}{4} - n\frac{\pi}{2}\right)S_1 + \sin\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right)S_2\right\},$$

wo

$$(72\text{a})\qquad S_1 = \sum_{p=0}^{\infty}{}'(-1)^p \frac{(n, 2p)}{(2x)^{2p}}, \quad S_2 = \sum_{p=0}^{\infty}{}'(-1)^p \frac{(n, 2p+1)}{(2x)^{p+1}}$$

ist. Dabei ist zur Abkürzung

$$(n, p) = \frac{\Gamma(n+p+\frac{1}{2})}{\Gamma(n-p+\frac{1}{2})}\,\frac{1}{\Gamma(p+1)} = \frac{n^2-(\frac{1}{2})^2}{1}\cdot\frac{n^2-(\frac{3}{2})^2}{2}\cdots\frac{n^2-\left(\frac{2p-1}{2}\right)^2}{p}$$

gesetzt.

Die Reihe (72) ist für $n = 0$ von *S. D. Poisson*[167]) aufgestellt, für andere ganzzahlige n von *C. G. J. Jacobi*[168]). Der Rest der Reihe ist für den Fall $n = 0$ von *R. Lipschitz*[169]) genauer untersucht; der Fall, dass n eine positive ganze Zahl ist, ist dabei zum Schluss kurz berührt. *Hankel*[170]) hat sodann die Reihe auf beliebige, auch komplexe Werte von n ausgedehnt, sowie auf komplexe x; er gelangt zu folgendem Resultate: Jede der Reihen S_1 und S_2 hat den Charakter, dass, wenn man die Reihe an irgend einer Stelle abbricht, ihr Wert von dem komplexen Werte, den sie darstellen soll, nur um eine Grösse abweicht, deren Modul kleiner ist als das nächstfolgende Glied. Jedoch kann diese Eigenschaft nur von dem Gliede an behauptet werden, von dem an $2p$ oder $2p+1$ grösser ist als der reelle Teil von $n - \frac{1}{2}$. Wenn n und x reelle positive Grössen sind, so haben in jeder Reihe die Glieder von $p \geq n$ an alternierende Zeichen; die Reihen sind in diesem Falle semikonvergente Reihen von dem gewöhnlichen Charakter.

Hankel hat weiter auch die semikonvergenten Reihen für $Y_n(x)$ entwickelt, die übrigens schon von *Lommel*[171]) aufgestellt waren.

167) J. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 349.

168) Astr. Nachr. 28 (1849), p. 94; Ges. Werke 7, p. 174.

169) J. f. Math. 56 (1859), p. 189.

170) Math. Ann. 1 (1869), p. 467—501, § 6. — *Hankel* bemerkt, dass die Begründung der Reihen für beliebige n durch *Lommel* nicht den Anforderungen entspricht, welche die neuere Analyse an eine solche stellt.

171) Studien, p. 95.

Eine neue Form des Restgliedes und eine genaue Diskussion desselben findet sich in einer Abhandlung von *H. Weber*[172]), und zwar werden hier beliebige reelle Werte von n, komplexe von x in Betracht gezogen; für ganzzahlige n wird auch die Reihe für $Y_n(x)$ aufgestellt.

Aus (72) folgen übrigens für ganzzahlige n und sehr grosse reelle Werte von x die Näherungswerte:

$$(72b) \qquad \begin{cases} J_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}(-1)^n(\cos x + \sin x), \\ J_{2n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}(-1)^{n+1}(\cos x - \sin x); \end{cases}$$

ferner wird für grosse reelle x:

$$(72c) \qquad K_n(x) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}(\cos x - \sin x).$$

Ist n die Hälfte einer ungeraden Zahl, so brechen die Reihen (72a) von selbst ab, was mit dem schon am Schluss von Nr. **44** erwähnten Resultate übereinstimmt.

Übrigens lässt sich aus dem Integral (66a) auch die Form ableiten

$$J_n(x) = x^n\{C \cdot \cos x + S \cdot \sin x\},$$

wo C und S nach steigenden Potenzen von x geordnete, stets konvergente Reihen sind[173]).

50. Rekurrente Relationen. Die hauptsächlichsten sind die folgenden, schon von *Bessel* entdeckten:

$$(73) \qquad \begin{cases} 2\frac{dJ_n(x)}{dx} = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x), \\ J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}J_n(x), \\ J_{n+1}(x) = \frac{n}{x}J_n(x) - \frac{dJ_n(x)}{dx}. \end{cases}$$

Diese Formeln gelten zunächst für den Fall, dass n eine positive ganze Zahl ist, für $n = 0$ auch, falls man $J_{-1}(x) = -J_1(x)$ setzt (vgl. Nr. **45**, Anmerkung 149). Ohne jede Änderung gelten ferner dieselben

172) Math. Ann. 37 (1890), p. 401—416. — Bei *B. Riemann*, Ann. Phys. Chem. 95 (1855), Werke, 2. Aufl., p. 50, kommen nur rein imaginäre Werte von x in Frage.

173) Vgl. das Lehrbuch von *Todhunter*, p. 292. — Zur Konstantenbestimmung beim Übergang von den aufsteigenden konvergenten zu den absteigenden semikonvergenten Reihen vgl. *G. Stokes*, Cambr. Trans. 9 (1850), 10 (1857), 11 (1868); papers 3, p. 43; 4, p. 102, 285.

Formeln für die Funktion $Y_n(x)$. Von den Folgerungen aus (73) sei die schon früher erwähnte Formel (68b) in Nr. **45** genannt, ferner die Darstellung von J_n durch J_{n-m} und J_{n-m-1} etc. — Wie übrigens zuerst *Lommel*[174]) gezeigt hat, gelten die Rekursionsformeln der J nicht nur für positive ganzzahlige, sondern auch für beliebige Werte von n, nur dass für negative ganzzahlige n $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ zu setzen ist.

Zwischen den Funktionen erster und zweiter Art findet *Lommel*[175]) noch folgende Beziehungen (n ganzzahlig, ν beliebig):

$$(73a)\quad \begin{cases} Y_n(z)J_{n+1}(z) - J_n(z)\,Y_n(z) = \dfrac{1}{z}, \\ J_\nu(z)J_{-(\nu-1)}(z) + J_{-\nu}(z)J_{\nu-1}(z) = \dfrac{2}{\pi z}\sin(\nu\pi). \end{cases}$$

Man kann die Rekursionsformeln auch zum Ausgangspunkt der Theorie machen, wie es z. B. *Sonine* in der schon mehrfach citierten Arbeit tut; ferner *N. Nielsen*, der von seiner Definition sofort zu einer Verallgemeinerung des Begriffs der Cylinderfunktionen gelangt[176]).

51. Zusammenhang mit Kettenbrüchen. Aus der zweiten Rekursionsformel (73) folgt, dass man $\frac{x J_{n+1}(x)}{J_n(x)}$ in einen Kettenbruch entwickeln kann, dessen Zähler sämtlich gleich x^2 sind, während die Nenner eine arithmetische Reihe bilden. Diese Form des Kettenbruchs tritt zuerst bei *Schlömilch*[177]) auf, während *Bessel* eine andere Form hat. In neuerer Zeit ist der Zusammenhang zwischen *Bessel*schen Funktionen und Kettenbrüchen von *Graf*[178]) genauer untersucht.

52. Wurzeln der Gleichung $J_\nu(z) = 0$. Die Gleichung

$$\frac{1}{z^\nu} J_\nu(z) = 0$$

hat unendlich viele Wurzeln, die sämtlich reell und von einander verschieden sind[179]). Es folgt das daraus, dass, wenn ν zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ liegt, $J_\nu(z)$ von $z = 2m\pi$ bis $(2m+\frac{1}{2})\pi$ stets positiv, von

174) Studien § 1 ff.

175) Math. Ann. 4 (1871), p. 103. — Eine allgemeinere Rekursionsformel leitet *N. Nielsen* ab, Math. Ann. 52 (1899), p. 228; vgl. Handbuch, Kap. 1.

176) Ann. di mat. (3) 5 (1900), p. 17; Handbuch, Kap. 2.

177) *Schlömilch*, Zeitschr. Math. Phys. 2 (1857), p. 137.

178) Ann. di mat. (2) 23 (1895), p. 45—65.

179) Der Satz ist für $n = 0$ von *D. Bernoulli* gefunden, Petrop. Comm. 6 (1732/33) [38], p. 116; vgl. *Fourier*, Théorie de la chaleur, chap. 6. Für beliebige Werte des Index findet er sich bei *Lommel*, Studien, p. 65 ff. — Vgl. auch *Riemann*, Partielle Differentialgleichungen, 2. Aufl., p. 266.

$z = (2m + 1)\pi$ bis $(2m + \frac{3}{2}\pi)$ stets negativ ist. Die höheren Wurzeln der Gleichung $J_\nu(z) = 0$ unterscheiden sich von einander nahezu um π.

Das über die Wurzeln von $J_\nu(z) = 0$ Gesagte gilt ohne weiteres auch für die Gleichung $\frac{dJ_\nu(z)}{dz} = 0$, daher auch für die allgemeinere

$$aJ_\nu(z) + bz\frac{dJ_\nu(z)}{dz} = 0,$$

in der a und b beliebig gegebene Konstanten sind.

Bezeichnet man mit p die Wurzeln der Gleichung $J_n(z) = 0$ für ganzzahlige positive Werte von n, so ist[180])

$$\sum \frac{1}{p^2} = \frac{1}{4(n+1)}, \qquad \sum \frac{1}{p^4} = \frac{1}{16(n+1)^2(n+2)} \quad \text{etc.}$$

Eine genauere Untersuchung der Wurzeln von $J_\nu(z) = 0$ für beliebige, auch negative ν ist von *A. Hurwitz* angestellt[181]).

53. Additionstheorem der Funktionen erster und zweiter Art. Ist

$$R = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos\vartheta},$$

so ist[182]):

$$(74a)\quad \begin{cases} J_0(R) = J_0(r)J_0(r_1) + 2\sum_1^\infty J_n(r)J_n(r_1)\cos(n\vartheta), \\ Y_0(R) = J_0(r)Y_0(r_1) + 2\sum_1^\infty J_n(r)Y_n(r_1)\cos(n\vartheta). \end{cases}$$

Die erste Gleichung gilt für beliebige Werte von r und r_1, die zweite nur für $r < r_1$. Das entsprechende Additionstheorem für $J_n(R)$ haben *Gegenbauer*[183]), *Sonine*[184]) und *Graf*[185]) entwickelt. *Heine* giebt auch das Additionstheorem für K_n an[186]).

180) *J. W. Strutt* (Lord *Rayleigh*), Phil. Mag. (4) 44 (1872), p. 328—344. — Für $n = 0$ in etwas anderer Form bei *Euler*, Petrop. Acta 1781 [84], p. 173.

181) Math. Ann. 33 (1888), p. 246—266. — Weitere Untersuchungen sind angestellt von *J. Mc Mahon*, Ann. Math. 9 (1894), p. 23; vgl. *Gray* und *Mathews*, p. 241; ferner von *H. M. Macdonald*, Lond. M. S. proc. 29 (1898), p. 575; 30 (1899), p. 165; von *P. Schafheitlin*, J. f. Math. 122 (1900), p. 299 und Arch. Math. Phys. (3) 1 (1901), p. 133. Mehrere dieser Arbeiten behandeln auch die Wurzeln von $Y_n(z) = 0$. — Über den Verlauf der Kurven $y = J_m(x)$ und $y = Y_m(x)$, vgl. die in Anm. 159) citierte Arbeit von *R. Olbricht*.

182) *C. Neumann*, Bess. F., p. 65.

183) Wien. Ber. 69, 1874; 74, 1876. — Eine von *Gegenbauer* herrührende Verallgemeinerung des Additionstheorems beweist *C. Wendt*, Mon. f. Math. 11 (1900), p. 125. — Eine andere Verallgemeinerung bei *N. Nielsen*, Ann. di mat. (3) 6 (1901), p. 43.

184) Math. Ann. 16 (1880), p. 1.

185) Math. Ann. 43 (1893), p. 136.

186) *Heine*, H. B. 1, p. 464. — Das Additionstheorem der Cylinderfunk-

Ausserdem sind zu erwähnen Formeln für $J_n(x+y)$,[187] sowie für $J_n(\sqrt{z+h})$.[188]

54. C. Neumann's Funktion O_n. — *C. Neumann* entwickelt[189] $1:(y-x)$ in eine nach *Bessel*'schen Funktionen J_n mit ganzzahligen n fortschreitende Reihe:

$$\frac{1}{y-x} = J_0(x)\,O_0(y) + 2\sum_1^\infty J_n(x)\,O_n(y) \tag{75}$$

und nennt $O_n(y)$ „*Bessel*'sche Funktion zweiter Art"; doch ist diese Bezeichnung, wie schon *Lommel* im Vorwort zu seinen Studien hervorhebt, nicht zweckmässig, da O_n nicht der *Bessel*'schen Differentialgleichung (65) genügt. Besser ist es, als „*Bessel*'sche Funktion zweiter Art" das zweite partikuläre Integral von (65) zu bezeichnen, also die Funktion Y_n oder K_n für ganzzahlige n; das geschieht auch von der Mehrzahl der Mathematiker.

C. Neumann stellt die Differentialgleichung auf, der O_n genügt, entwickelt diese Funktion in eine endliche, nach negativen Potenzen von y fortschreitende Reihe, stellt dieselbe in Form eines bestimmten Integrals dar und zeigt, dass für O_n auch die erste der Rekursionsformeln (73) gilt, nicht aber die beiden anderen Formeln (73).

Für diese Funktion O_n gilt nun der folgende Satz. Es ist[190]:

$$\begin{aligned} \int J_n(z)\,O_\nu(z)\,dz &= \pi i, && \text{falls } n=\nu \text{ eine beliebige positive ganze Zahl ist,} \\ &= 2\pi i && \text{für } n=\nu=0, \\ &= 0, && \text{falls } n \gtrless \nu. \end{aligned} \tag{76}$$

Das Integral ist in der komplexen Ebene über den Umfang einer beliebigen, den Punkt $z=0$ umschliessenden Kurve zu erstrecken. Liegt $z=0$ nicht im Innern der Kurve, so verschwindet das Integral auch für $n=\nu$. Ferner ist, falls $z=0$ im Innern der Kurve liegt,

$$\int J_n(z)\,J_\nu(z)\,dz = 0 \qquad \int O_n(z)\,O_\nu(z)\,dz = 0, \tag{76a}$$

mag $n=\nu$ oder $n \gtrless \nu$ sein.

---

tionen zweiter Art für beliebige Indizes giebt *A. Sommerfeld*, Math. Ann. 47 (1896), p. 356; ferner *H. M. Macdonald*, Lond. Math. Proc. 32 (1900), p. 152.

187) *C. Neumann*, Bess. F., p. 40. — Vgl. auch *Schläfli*, Math. Ann. 3 (1871), p. 134; *Graf*, Math. Ann. 43 (1893), p. 136; *N. Nielsen*, Math. Ann. 52 (1899), p. 228. *Schläfli* teilt auch eine Entwicklung für $O_n(x+y)$ mit, wo O_n die in Nr. 54 definierte Funktion ist.

188) *Lommel*, Studien, § 5.

189) Bessel'sche Funktionen, p. 8 ff.

190) *C. Neumann*, Bess. F., p. 19.

55. Entwicklung einer analytischen Funktion nach Bessel'schen Funktionen. Aus dem oben erwähnten Satze folgt, dass sich jede Funktion $f(x)$, welche innerhalb eines Kreises mit dem Mittelpunkte $x = 0$ eindeutig und stetig bleibt, in eine Reihe

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu J_\nu(x) \tag{77}$$

entwickeln lässt (ν ganzzahlig), wo

$$\alpha_\nu = \frac{1}{\pi i} \int f(x) O_\nu(x) dx. \tag{77a}$$

Die Integration ist positiv um den Kreis herumzuführen; für $\nu = 0$ ist α_0 gleich dem Doppelten des Integrals.

Eine andere Bestimmung der Koeffizienten leitet *Heine*[191]) aus der Entwicklung einer Funktion nach zugeordneten Kugelfunktionen her.

Als Beispiele für die Entwicklung giebt *C. Neumann*[192]) die Entwicklung ganzer positiver Potenzen von z (auch von z^0), ebenso von $\cos z$ und $\sin z$ nach *Bessel'*schen Funktionen erster Art, die Entwicklung negativer Potenzen von z nach der Funktion O_ν in endliche Reihen.

56. Hinweis auf andere Reihen sowie auf Entwicklungen nach Quadraten und Produkten der Cylinderfunktionen. Die Reihen für $\sin z$ und $\cos z$ ergeben sich auch aus der Entwicklung des Ausdrucks $e^{\frac{1}{2}z\left(y-\frac{1}{y}\right)}$ nach positiven und negativen Potenzen von y. Die Koeffizienten dieser Entwicklung sind nämlich die $J_n(z)$ mit ganzzahligen Indizes[193]); für $y = e^{i\varphi}$ folgen zunächst die Reihen für $\cos(z \sin\varphi)$ und $\sin(z \sin\varphi)$ und für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ die für $\cos z$ und $\sin z$.

Setzt man bei der Entwicklung des vorstehenden Ausdrucks $2z$ an Stelle von z und vergleicht die so erhaltene Reihe mit dem Quadrat der ursprünglichen, so ergiebt sich die Entwicklung von $J_n(2z)$ nach Quadraten und Produkten der J_n.[194]) Andere Entwicklungen der letztgenannten Art, wie auch allgemeine Sätze über dieselbe hat *C. Neumann* angegeben[195]). Reihen von der Form $\Sigma A_n J_n(nz)$ sind von *W. Kapteyn* untersucht[196]), Verallgemeinerungen der *Neumann*'schen

191) *Heine*, H. B. 1, p. 255.
192) *C. Neumann*, Bess. F., p. 39—40.
193) *Schlömilch*, Zeitschr. Math. Phys. 2 (1857), p. 137.
194) *Lommel*, Studien § 12; vgl. auch § 15.
195) Math. Ann. 3 (1871), p. 581.
196) Ann. éc. norm. (3) 10 (1893), p. 91.

und *Kapteyn*'schen Reihen von *N. Nielsen*[197]). *Nielsen* hat ferner Reihen gefunden, die nach Produkten von Cylinderfunktionen fortschreiten und innerhalb eines gewissen Bereichs der Variabeln überall den Wert Null besitzen[198]).

57. Die für die Aufgaben der Physik erforderlichen Entwicklungen. Während es sich in Nr. **55** und **56** um Reihen handelte, die nach den J mit variablem Index, meist aber mit demselben Argumente fortschreiten, treten bei den Anwendungen auf physikalische Probleme Reihen auf, die nach den Funktionen J mit demselben Index fortschreiten, während die Argumente sich von Glied zu Glied ändern; und zwar sind die Argumente von der Form $\varkappa_p x$, wo $\varkappa_p$ die p^{te} Wurzel der Gleichung $J_n(x) = 0$ oder der Gleichung $\frac{dJ_n(x)}{dx} = 0$ oder noch allgemeiner der Gleichung $aJ_n(x) + bx\,\frac{dJ_n(x)}{dx} = 0$ ist. Soll eine Funktion $f(x)$ in eine derartige Reihe entwickelt werden:

$$f(x) = \sum_p A_p J_n(\varkappa_p x), \tag{78}$$

so ergeben sich die Koeffizienten A_p mittelst des Satzes, dass, wenn $\varkappa$ und $\varkappa_1$ zwei verschiedene Wurzeln einer der vorher genannten Gleichungen sind,

$$\int_0^1 J_n(\varkappa x) J_n(\varkappa_1 x) x\,dx = 0 \tag{78a}$$

ist, während das Integral für $\varkappa = \varkappa_1$ den Wert hat:

$$[J_n'(\varkappa)]^2 + \left(1 - \frac{n^2}{\varkappa^2}\right)[J_n(\varkappa)]^2 \tag{78b}$$

(J_n' ist die Ableitung von J_n). Die Entwicklung (78) findet sich für $n = 0$ schon bei *Fourier*; *Lommel*[199]) nennt deshalb die Entwicklung (78), resp. die Bestimmung der Koeffizienten den *Fourier*'schen Lehrsatz. Für andere Werte von n ist der Satz vom *Lommel* abgeleitet[200]).

In (78) ist zu beachten, dass n so zu wählen ist, dass $\lim_{x=0} \frac{f(x)}{x^n}$

197) Ann. éc. norm. (3) 18 (1901), p. 39; vgl. *Nielsen*, Handbuch, Kap. 20—23.

198) Math. Ann. 52 (1899), p. 582; Ann. di mat. (3) 6 (1901), p. 301; vgl. *Nielsen*, Handbuch, Kap. 25.

199) *Lommel*, Studien § 19.

200) *Lommel* l. c.; vgl. *Riemann*, Partielle Differentialgleichungen, § 96. — Konvergenzbeweise bei *H. Hankel*, Math. Ann. 8 (1875), p. 471; *Schläfli*, Math. Ann. 10 (1876), p. 137; *U. Dini*, Serie di *Fourier*, Pisa 1880. — Vgl. *Nielsen*, Handbuch, Kap. 26.

endlich ist. — Hat $f(x)$ diese Eigenschaft nicht, so muss man nicht $f(x)$ selbst, sondern die mit einer passenden Potenz von x multiplizierte Funktion $f(x)$ in eine Reihe von der Form (78) entwickeln.

Bei Aufgaben der mathematischen Physik, die den Hohlcylinder betreffen, tritt an Stelle von J_n die allgemeine Lösung der *Bessel*'schen Differentialgleichung, also für ganzzahlige n die Funktion

$$J_n(\varkappa_p x) + C_p Y_n(\varkappa_p x) = f_n(\varkappa_p x),$$

und es sind C_p und $\varkappa_p$ aus zwei Gleichungen der Form zu bestimmen[201]):

$$J_n(\varkappa_p x_1) + C_p Y_n(\varkappa_p x_1) = 0,$$
$$J_n(\varkappa_p x_2) + C_p Y_n(\varkappa_p x_2) = 0.$$

An Stelle der Gleichung (78a) tritt hier die Formel:

$$\int_{x_1}^{x_2} f_n(\varkappa x) f_n(\varkappa_1 x)\, x\, dx = 0,$$

falls wieder $\varkappa$ und $\varkappa_1$ zwei verschiedene Wurzeln des in Frage kommenden Gleichungssystems sind. Der Wert des Integrals für $\varkappa = \varkappa_1$ lässt sich indessen nicht, wie vorher, in endlicher Form angeben.

58. Die Reihe von Schlömilch. Eine andere Entwicklung einer zwischen 0 und π gegebenen Funktion leitet *Schlömilch*[202]) ab, nämlich:

$$f(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_1^\infty A_n J_0(nx), \tag{79}$$

wo

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u \cos(nu)\, du \int_0^1 \frac{f'(ut)\, dt}{\sqrt{1-t^2}}. \tag{79a}$$

Die analoge Reihe, in der J_m an Stelle von J_0 steht, giebt *Lommel*[203]) an.

59. C. Neumann's Integraldarstellung einer Funktion mittelst Bessel'scher Funktionen. *C. Neumann*[204]) leitet aus der Entwicklung einer Funktion noch Kugelfunktionen (Gl. (29) in Nr. **15**) durch den Übergang von einer Kugel mit endlichem zu einer solchen mit

---

201) Diese Form der Gleichungen entspricht dem Falle, dass beim Vollcylinder $\varkappa_p$ eine Wurzel der Gleichung $J_n(x) = 0$ ist. Welche Gleichungssysteme an Stelle der beiden andern oben genannten Gleichungen treten, ergiebt sich leicht.

202) *Schlömilch*, Zeitschr. Math. Phys. 2, 1857.

203) *Lommel*, Studien, § 20. *Lommel* nennt (79) den *Schlömilch*'schen Lehrsatz.

204) *C. Neumann*, Entwickelungen, p. 18 und 126 ff.; vgl. auch *Heine*, H. B. 1, p. 443.

unendlich grossem Radius folgende Darstellung einer Funktion zweier Variabeln nach Cylinderfunktionen her:

$$(80) \qquad F(\varrho_1, \varphi_1) = \lim_{q=\infty} \iint_{\mathfrak{T}} \varrho\, d\varrho\, d\varphi\, F(\varrho, \varphi) \Big[\int_0^q J_0(qR) q\, dq \Big],$$

wo

$$R = \sqrt{\varrho^2 + \varrho_1{}^2 - 2\varrho\varrho_1 \cos(\varphi - \varphi_1)}$$

und die Integration über die ebene Fläche $\mathfrak{T}$ auszudehnen ist. Falls $F(\varrho, \varphi)$ innerhalb $\mathfrak{T}$ abteilungsweise stetig ist, konvergiert die rechte Seite von (80) mit wachsendem q gegen eine feste Grenze; und zwar ist diese Grenze $= 0$, falls ϱ_1, φ_1 ausserhalb $\mathfrak{T}$ liegt, während für Punkte ϱ_1, φ_1 innerhalb $\mathfrak{T}$ die Grenze das arithmetische Mittel der Werte ist, welche $F(\varrho, \varphi)$ längs eines um ϱ_1, φ_1 beschriebenen unendlich kleinen Kreises besitzt.

Aus (80) folgt die Darstellung einer Funktion $f(\varrho_1)$ mit einem Argument zwischen $\varrho_1 = 0$ und $\varrho_1 = c$ durch ein Doppelintegral; und letztere Darstellung lässt sich auch dahin verallgemeinern, dass J_n (n eine positive ganze Zahl) an Stelle von J_0 tritt[205]).

60. Bestimmte Integrale mit Bessel'schen Funktionen. In den Arbeiten über *Bessel*'sche Funktionen findet man vielfach die Werte von bestimmten Integralen, die *Bessel*'sche Funktionen enthalten, berechnet. Es mögen einige von diesen hier Platz finden.

Lipschitz[206]) findet

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \int_0^\infty e^{-ax} J(bx)\, dx.$$

Nach *H. Weber*[207]) ist

$$\int_0^\infty J_\nu(bx) \frac{dx}{x} = \frac{1}{\nu}, \qquad (b > 0).$$

Andre derartige Integrale finden sich bei *Hankel*[208]) und *Sonine*[209]).

C. Neumann[210]) stellt das Quadrat einer *Bessel*'schen Funktion mit ganzzahligem Index durch ein Integral dar:

$$[J_n(x)]^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi J_{2n}(2x \sin\omega)\, d\omega,$$

---

205) *C. Neumann*, Entwickelungen, p. 137 ff. — Vgl. auch *F. W. Sheppard* im Quart. J. 23 (1888), p. 223.
206) J. f. Math. 56 (1859), p. 189.
207) J. f. Math. 69 (1868), p. 232.
208) Math. Ann. 8 (1875), p. 453.
209) Math. Ann. 16 (1880), p. 1.
210) *C. Neumann*, Bess. F., p. 70.

und *Schläfli* knüpft daran die Darstellung des Produktes $J_m(x)\,J_n(x)$ durch ein Integral[211]).

Auch die Kugelfunktion lässt sich durch ein derartiges Integral darstellen[212]):

$$P^n(\cos\vartheta) = \frac{1}{\Gamma(n+1)}\int_0^\infty e^{-x\cos\vartheta}\,J_0(x\sin\vartheta)\,x^n\,dx.$$

Setzt man in dem letzten Integral für J_0 die semikonvergente Reihe (Gl. (72)), so ergiebt sich eine entsprechende Reihe für $P^n(\cos\vartheta)$, aus der man angenäherte Werte dieser Funktion für grosse n ableiten kann.

61. Tafeln der Bessel'schen Funktionen. Solche Tafeln der Funktionen J_0 und J_1 sind zuerst für Argumente zwischen $x = 0$ und $x = 3{,}2$ von *Bessel*[213]) berechnet, erweiterte Tafeln bis $x = 20$ von *Hansen*[214]). Noch umfassender ist die Tafel von *Meissel*[215]). Die beiden ersten Tafeln sind abgedruckt in *Lommel*'s Studien wie in dem Lehrbuche von *Byerly*, ein Auszug daraus auch in Lord *Rayleigh*'s Schall. Tafeln von Y_0 und Y_1 giebt *B. A. Smith*[216]). Bei *Rayleigh* und *Byerly* ist auch eine Tafel der Wurzeln der Gleichung $J_n(x) = 0$ mitgeteilt, und zwar sind bei *Byerly* die ersten 9 Wurzeln angegeben für $n = 0, 1, \ldots, 5$. Die ersten 12 Wurzeln von J_0 und J_1 giebt *G. Stokes*[217]), die ersten 40 von J_0 geben *Wilson* und *Peirce*[218]), die ersten 50 von J_1 *Meissel*[219]).

Über neuere englische Tafeln ist im Brit. Ass. Rep. 1889, 1893 und 1896 berichtet.

---

211) Math. Ann. 3 (1871), p. 134. — Vgl. auch *N. Nielsen*, Ann. éc. norm. (3) 18 (1901), p. 39.

212) *O. Callandreau*, Bull. Darb. (2) 15 (1891), p. 121. Dieselbe Formel ist auch von *Hobson*, Lond. Math. Proc. 25 (1894), p. 49 abgeleitet. *Hobson* giebt ferner die entsprechende Formel für $P_\nu^n(\cos\vartheta)$ an. — *L. Gegenbauer*, Monatsh. Math. 10 (1899), p. 189, hat das Produkt

$$(\sin\varphi)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,C_n^\nu(\cos\varphi)J^{n+\nu}(\alpha)$$

durch ein Integral dargestellt.

213) Vgl. die Nr. **44**, Anm. 140) citierte Arbeit vom Jahre 1824.

214) Schriften der Sternwarte Seeberg, Gotha 1843. — Eine kleine Tafel von J_0 und $(J_0)^2$ bei *G. Airy*, Phil. mag. 18 (1841), p. 7.

215) Berl. Abh. 1888, abgedruckt bei *Gray* und *Mathews*.

216) Mess. (2) 26 (1896), p. 98.

217) Cambr. Trans. 9 (1850); papers 2, p. 355.

218) N. Y. Bull. (2) 3 (1897), p. 153.

219) Progr. Kiel 1890.

IX. Funktionen des elliptischen und parabolischen Cylinders.

62. Funktionen des elliptischen Cylinders. Diese Funktionen treten bei Fragen der mathematischen Physik auf, welche elliptische Cylinder oder elliptische Platten betreffen; sie stehen zu den *Bessel*schen Funktionen, die auch schlechtweg Cylinderfunktionen genannt werden, in demselben Verhältnis wie die *Lamé*'schen zu den Kugelfunktionen. Die Funktionen des elliptischen Cylinders genügen der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\mathfrak{E}(\varphi)}{d\varphi^2} + (\lambda^2 \cos^2\varphi - \mathfrak{B})\,\mathfrak{E}(\varphi) = 0. \tag{81}$$

$\mathfrak{B}$ ist die Wurzel einer gewissen transcendenten Gleichung. Zwei partikuläre Integrale von (81) unterscheidet man als Funktionen erster und zweiter Art, und zwar sind die Funktionen erster Art im Endlichen überall endlich. Beide Arten zerfallen, ähnlich wie die *Lamé*'schen Funktionen, in je vier Klassen.

Am vollständigsten sind diese Funktionen von *Heine*[220]) behandelt. *Heine* giebt insbesondere Entwicklungen nach Kosinus, resp. Sinus der Vielfachen von φ, dann nach *Bessel*'schen Funktionen J, resp. K mit dem Argumente $i\lambda \cos\varphi$. — *Lindemann*[221]), der an Gleichung (81) eine ähnliche Verallgemeinerung knüpft wie *Hermite* an die *Lamé*'sche Differentialgleichung (vgl. Nr. **39**), giebt noch Entwicklungen nach Potenzen von $\cos^2\varphi$. — Eine ausführliche Darstellung dieser Funktionen findet sich auch in einem Programm von *Särchinger*[222]); hier sind mehrere Resultate von *Heine* erweitert, einige auch verbessert.

Häntzschel[223]) legt seiner Behandlung dieser Funktionen die etwas verallgemeinerte Differentialgleichung zu Grunde:

$$\frac{d^2z}{dw^2} = \left[h^2\left(\frac{\beta e^{miw} - \alpha e^{-miw}}{2mi}\right)^2 - \nu^2\right] z \tag{82}$$

und betrachtet neben dieser transcendenten eine algebraische Form

---

220) *Heine*, H. B. 1, p. 401 ff.; 2, p. 202 ff. — Vgl. ferner die Darstellung bei *Fr. Pockels*, über d. part. Diffgl. $\Delta u + k^2 u = 0$, Leipzig 1891, p. 186 ff. Dort ist auch das *Klein*'sche Oscillationstheorem [Nr. **41**] auf diese Funktionen übertragen.

221) *Lindemann*, Math. Ann. 22 (1883), p. 117. — Betreffs der Reihen für die Funktionen $\mathfrak{E}$ vgl. auch eine Arbeit von *H. Bruns*, Astr. Nachr. Nr. 2533, 2553 (1883). — Über weitere astronomische Arbeiten, in denen die Funktion $\mathfrak{E}$ auftritt, referiert *Tisserand*, Traité de Méc. cél. 3 (1894).

222) Progr. Chemnitz 1894.

223) Progr. Duisburg 1886; Progr. d. städt. höh. Bürgersch., Berlin 1889; siehe auch die am Anfang citierte Monographie *Häntzschel*'s, Teil 5.

der Gleichung. Er erörtert das funktionentheoretische Verhalten der Integrale von (82), insbesondere an der unendlich fernen Stelle, den Zusammenhang mit den *Lamé*'schen Funktionen u. s. w. Doch ist das Resultat dieser Untersuchungen kein völlig abgeschlossenes.

63. Funktionen des parabolischen Cylinders. Noch andere Funktionen erfordern die sich an den parabolischen Cylinder knüpfenden Aufgaben. Man erhält die Differentialgleichung dieser Funktionen, indem man in (82) $\alpha = \beta$, $m = 0$ setzt. Genauer untersucht sind diese Funktionen zuerst von *K. Baer*[224]), bei dem die Differentialgleichung, der die Funktionen genügen, die Form hat:

$$\frac{d^2z}{d\varrho^2} + (h - \varrho^2)\, z = 0. \tag{83}$$

Hinsichtlich der Darstellung dieser Funktionen und ihrer wichtigsten Eigenschaften müssen wir auf die erwähnte Arbeit verweisen, sowie auf eine andre von *Häntzschel*[225]).

Ein Schema über die Multiplizität der singulären Punkte giebt für die in Nr. **62** und **63** behandelten, wie auch für die Funktionen des Rotationskegels und des Rotationscylinders *M. Bôcher* auf p. 193 seiner schon erwähnten Monographie.

224) *K. Baer,* Progr. Küstrin 1883.
225) *Häntzschel,* Zeitschr. Math. Phys. 33 (1888), p. 22.

(Abgeschlossen im Juli 1904.)

Neuester Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. XVIII. Heft. Mit 34 Figuren im Text. [II u. 196 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ca. *M.* 6.—.

Inhalt: J. L. Heiberg, Mathematisches zu Aristoteles.
Conrad H. Müller, Studien zur Geschichte der Mathematik, insbesondere des mathematischen Unterrichts an der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert.
Rich. Lindt, Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, seine Beweise und die Unmöglichkeit seiner Umkehrung bei Verwendung des Begriffes „Gleichgewicht eines Massensystems".

Alexandroff, Iwan, Professor der Mathematik am Kaiserlich russischen Gymnasium zu Tambow, Aufgaben aus der niederen Geometrie. Nach Lösungsmethoden geordnet und zu einem Übungsbuche zusammengestellt. Mit einem Vorwort von Dr. M. Schuster, Professor an der Oberrealschule zu Oldenburg und 100 Figuren im Text. [VI u. 123 S.] gr. 8. 1903. geb. n. *M.* 2.40.

Ahrens, Dr. W., Scherz und Ernst in der Mathematik. Geflügelte und ungeflügelte Worte. [X u. 522 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. n. *M.* 8.—

Berichte, mathematische und naturwissenschaftliche, aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und der Königl. Ungar. Naturwissenschaftl. Gesellschaft. Herausgegeben von Roland Baron Eötvös, Julius König, Karl von Than. Redigiert von Josef Kürschák und Franz Schafarzik, Mitgliedern der Ungarischen Akademie der Wissenschaften. XIX. Band. [XIV u. 492 S.] gr. 8. 1904. geh. n. *M.* 8.—

Burkhardt, H., Entwicklungen nach oscillierenden Functionen. A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. X. Band. gr. 8. geh. 1. Lfg. [176 S.] 1901. n. *M.* 5.60; 2. Lfg. [S. 177—400.] 1902 n. *M.* 7.60; 3. Lfg. [S. 401—768.] 1903. n. *M.* 12.40; 4. (Schluß-)Lieferung. 1904. [U. d. Pr.]

Bruns, Dr. Heinrich, Professor der Astronomie an der Universität zu Leipzig. Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens. [IV u. 160 S.] gr. 8. 1903. geh. *M.* 3.40, geb. *M.* 4.—

Cesaro, Ernesto, Professor der Mathematik an der Königl. Universität zu Neapel, Lehrbuch der algebraischen Analysis. Deutsche Ausgabe von Dr. G. Kowalewski, Professor an der Universität Greifswald. gr. 8. 1904. [U. d. Pr.]

Czuber, E., Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. [XV u. 594 S.] gr. 8. 1903. In Leinwand geb. n. *M.* 24.—

Drach, Jules, à Lille, Histoire des Sciences Mathématiques en France au XIX^e^ siècle. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. gr. 8. 1904. [In Vorbereitung.]

Enriques, F., Professor an der Universität Bologna, Vorlesungen über projektive Geometrie. Deutsche Ausgabe von Dr. phil. Hermann Fleischer in Göttingen. Mit einem Einführungswort von Felix Klein und 187 Figuren im Text. [XIV u. 374 S.] gr. 8. 1903. geh. *M.* 8.—. In Leinw. geb. *M.* 9.—

Fiedler, W., die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. 4. Aufl. In 3 Teilen. I. Teil: Die Methoden der darstellenden und die Elemente der projektiven Geometrie. Mit zahlreichen Figuren im Text und auf 2 Tafeln. [XXIV u. 431 S.] gr. 8. 1904. geh. n. *M.* 10.—, geb. n. *M.* 11.—

Föppl, Dr. Aug., Professor an der Königl. Technischen Hochschule zu München, früher Oberlehrer an der Städt. Gewerbeschule zu Leipzig, Vorlesungen über technische Mechanik. In 4 Bänden. gr. 8. Preis des ganzen Werkes in 4 Leinwand-Bänden n. *M.* 44.—

I. Band. Einführung i. d. Mechanik. (1. Aufl. 1898.) 2. Aufl. [XIV u. 412 S.] 1900. geb. n. *M.* 10.—
II. — Graphische Statik. (1. Aufl. 1900.) 2. Aufl. [XII u. 471 S.] 1903. geb. n. *M.* 10.—
III. — Festigkeitslehre. (1. Aufl. 1897.) 2. Aufl. [XVIII u. 512 S.] 1900. geh. n. *M.* 12.—
IV. — Dynamik. (1. Aufl. 1899.) 2. Aufl. 1901. [XV u. 506 S.] geb. n. *M.* 12.—

Fort, O. und O. Schlömilch, Lehrbuch der analytischen Geometrie. I. Teil. Analytische Geometrie der Ebene von O. Fort, weil. Professor am Kgl. Sächs. Polytechnikum zu Dresden. 7. Aufl. besorgt von R. Heger in Dresden. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. [XVII u. 268 S.] 1904. gr. 8. geh. n. *M.* 4.—, geb. n. *M.* 4.80.

Ganter, H. u. F. Rudio, die Elemente der analytischen Geometrie. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium. Mit zahlreichen Übungsbeispielen und Figuren. gr. 8. In Leinwand geb. jeder Teil n. *M.* 3.—
I. Teil: Die analytische Geometrie der Ebene. 5. Aufl. [IV u. 187 S.] 1903.
II. Teil: Die analytische Geometrie des Raumes. 3. Aufl. [X u. 186 S.] 1902.

*

Gauß, Carl Friedrich, Werke. Herausgegeben von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen. 10 Bände. gr. 4. kart.

Band I: Disquisitiones arithmeticae. 2. Abdr. [478 S.] 1870. n. *M.* 20.—
— II: Höhere Arithmetik. 2. Abdr. [528 S.] 1876. n. *M.* 20.— Nachtrag zum ersten Abdr. des 2. Bandes. [33 S.] 1876. n. *M.* 2.—
— III: Analysis. 2. Abdr. [499 S.] 1876. n. *M.* 20.—
— IV: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Geometrie. 2. Abdr. [492 S.] 1880. n. *M.* 25.—
— V: Mathematische Physik. 2. Abdr. [642 S.] 1877. n. *M.* 25.—
— VI: Astronomische Abhandlungen und Aufsätze. 2. Abdr. [664 S.] 1874. n. *M.* 33.—
— VIII: Nachträge zur Arithmetik, Analysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Geometrie; insbesondere Grundlagen der Geometrie. [III u. 458 S.] 1900. n. *M.* 24.—
— IX: Geodätische Nachträge zu Band IV; insbesondere Hannoversche Gradmessung. [IV u. 528 S.] 1903. n. *M.* 26.—

Band VII wird außer dem neuen Abdruck der *Theoria motus* eine vollständige Darstellung von Gauß' ausgedehnten Arbeiten über astronomische Störungsrechnung bringen. Band X biographische Angaben und interessante Stücke des Briefwechsels bieten.

Geißler, Dr. Kurt, die Grundsätze und das Wesen des Unendlichen in der Mathematik und Philosophie. [VIII u. 417 S.] gr. 8. 1902. geh. n. *M.* 14.—, geb. n. *M.* 16.—

Grassmann's, Hermann, gesammelte mathematische und physikalische Werke. Auf Veranlassung der mathematisch-physikalischen Klasse der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften und unter Mitwirkung der Herren Jacob Lüroth, Eduard Study, Justus Grassmann, Hermann Grassmann der Jüngere, Georg Scheffers herausgegeben von Friedrich Engel. II. Band. I. Teil. Die Abhandlungen zur Geometrie und Analysis. Mit 45 Figuren im Text. [X u. 452 S.] gr. 8. 1904. geh. *M.* 16.—

Hamel, Dr. phil. Georg, Assistent für theoret. Mechanik, die Lagrange-Eulerschen Gleichungen der Mechanik. (Sonderabdruck aus der Zeitschrift für Mathematik und Physik. 50. Band. 1904. 1. u. 2. Heft.) [57 S.] gr. 8. geh. *M.* 1.60.

Haentzschel, Dr. Emil, Professor an der Kgl. Technischen Hochschule und am Köllnischen Gymnasium zu Berlin. Das Erdsphäroid und seine Abbildung. Mit 16 Text-Abbildungen. [VIII u. 140 S.] 1903. gr. 8. geb. n. *M.* 3.40.

Hilbert, Dr. David, o. Professor an der Universität Göttingen, Grundlagen der Geometrie. Zweite, durch Zusätze vermehrte und mit fünf Anhängen versehene Auflage. Mit zahlreichen in den Text gedruckten Figuren. [VI u. 175 S.] gr. 8. 1903. geb. n. *M.* 5.20, geh. *M.* 5.60.

Klein, F., und A. Sommerfeld, über die Theorie des Kreisels. 3 Hefte. gr. 8.
Heft I. Die kinematischen und kinetischen Grundlagen der Theorie. [IV u. 196 S.] 1897. geh. n. *M.* 5.60, in Leinwand geb. n. *M.* 6.60.
— II. Durchführung der Theorie im Falle des schweren symmetrischen Kreisels. [IV u. 315 S.] 1898. geh. n. *M.* 10.—, in Leinwand geb. n. *M.* 11.—
— III. Die störenden Einflüsse. Astronomische und geophysikalische Anwendungen. [IV u. 247 S.] 1903. geh. n. *M.* 9.—

König, Julius, Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen. Aus dem Ungarischen übertragen vom Verfasser. [X u. 564 S.] gr. 8. 1903. geh. n. *M.* 18.—, geb. n. *M.* 20.—

Koenigsberger, Leo, Carl Gustav Jacobi. Festschrift zur Feier der hundertsten Wiederkehr seines Geburtstages. Mit einem Bildnis und dem Faksimile eines Briefes. [XVIII u. 554 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. n. *M.* 16.—

———— Carl Gustav Jacobi. Rede zu der von dem internationalen Mathematiker-Kongreß in Heidelberg veranstalteten Feier der hundertsten Wiederkehr seines Geburtstages, gehalten am 9. August 1904. Mit einem Bildnis. [II u. 40 S.] 4. gr. 8. 1904.

Krazer, Dr. Adolf, o. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe, Lehrbuch der Thetafunktionen. Mit 9 Textfiguren. gr. 8. 1903. [XXIV u. 509 S.] In Leinw. geb. n. *M.* 24.—

Kronecker, L., Vorlesungen über Mathematik. In zwei Teilen. II. Teil: Vorlesungen über Arithmetik. 2. Abschnitt: Vorlesungen über die Theorie der Determinanten. 1. Band: Erste bis einundzwanzigste Vorlesung. Bearbeitet und fortgeführt von Dr. Kurt Hensel. Mit 11 Fig. im Text. [XII u. 390 S.] gr. 8. 1903. geh. n. *M.* 20.—, geb. n. *M.* 21.—

Lobatschefskijs, N. G., imaginäre Geometrie und Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale. Übersetzt und mit Anmerkungen herausgegeben von Dr. Heinrich Liebmann, Privatdozent an der Universität Leipzig. Mit 39 Figuren im Text und einer Tafel am Schluß. (A. u. d. Titel: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. XIX. Heft.) gr. 8. 1904. [U. d. Pr.]

Kübler, J., Baurat in Eßlingen, die Proportion des goldenen Schnittes als das geometrische Ziel der stetigen Entwicklung und die daraus hervorgehende Fünfgestalt mit ihrer durchgreifenden Fünfgliederung. Mit 15 Figuren auf 4 Tafeln. [36 S.] gr. 8. 1903. geh. n. *M.* 1.60.

Müller, Conrad H., Göttingen, Studien zur Geschichte der Mathematik insbesondere des mathematischen Unterrichts an der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert. Mit einer Einleitung: Über Charakter und Umfang historischer Forschung in der Mathematik (Sonderabdruck aus dem XVIII. Heft der Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik). [93 S.] gr. 8. 1904. geh. n. *M.* 2.—

Netto, Dr. Eugen, o. ö. Professor an der Universität Gießen, Elementare Algebra. Akademische Vorlesungen für Studierende der ersten Semester. Mit 19 Figuren im Text. [VIII u. 200 S.] gr. 8. 1904. geb. n. *M.* 4.40.

Nielsen, Dr. Niels, Privatdozent an der Universität Kopenhagen, Inspektor des Mathematischen Unterrichts an den Gymnasien Dänemarks, Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen. [XIV u. 408 S.] gr. 8. 1904. geb. n. *M.* 14.—

Ostenfeld, A., Professor an der Technischen Hochschule zu Kopenhagen. Technische Statik. Vorlesungen über die Theorie der Tragkonstruktionen. Deutsche Ausgabe besorgt von D. Skouge. Mit 33 lithographierten Tafeln. [VIII u. 457 S.] gr. 8. 1903. geb. n. *M.* 12.—

Pfeiffer, Dr. Emanuel, Professor an der Königl. Industrieschule zu München, physikalisches Praktikum für Anfänger. Dargestellt in 25 Arbeiten. Mit 47 in den Text gedruckten Abbildungen. [VIII u. 150 S.] gr. 8. 1903. geb. n. *M.* 3.60.

Poincaré, Henri, Membre de l'institut. Wissenschaft und Hypothese. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann. [XVI u. 342 S.] 8. 1904. geb. n. *M.* 4.80.

Reichel, Dr. Otto, Professor an der Königl. Landw. Hochschule zu Berlin, Vorstufen der höheren Analysis und analytischen Geometrie. Mit 30 Figuren im Text. [X u. 111 S.] gr. 8. 1904. geb. *M.* 2.40.

Salmon, George, Analytische Geometrie der Kegelschnitte. Mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden. Frei bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler, Professor am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. Zweiter Teil. Sechste Auflage. [XXIV u. 416 S.] gr. 8. 1903. geh. *M.* 8.—, geb. *M.* 9.—

Schulze, Bruno, General[illegible] und Chef der Topographischen Abteilung der Landesaufnahme, Das militärische Aufnehmen, unter besonderer Berücksichtigung der Arbeiten der Königl. Preuß. Landesaufnahme nebst einigen Notizen über Photogrammetrie und über die topographischen Arbeiten Deutschland benachbarter Staaten. Nach den auf der Königl. Kriegsakademie gehaltenen Vorträgen bearbeitet. Mit 129 Figuren im Text. [XIII u. 305 S.] gr. 8. 1903. geb. n. *M.* 8.—

Seliwanoff, Demetrius, Priv. Dozent an der Universität St. Petersburg, Lehrbuch der Differenzenrechnung. [IV u. 92 S.] gr. 8. 1904. geb. *M.* 4.—

Serret-Harnack, Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung. Zweite, durchgesehene Auflage. Herausgegeben von G. Bohlmann und E. Zermelo. Dritter Band. Differentialgleichungen und Variationsrechnung. Mit 43 in den Text gedr. Fig. [XII u. 768 S.] gr. 8. 1904. geh. n. *M.* 9.—, geb. n. *M.* 10.—

Auch in zwei Lieferungen:

1. Lieferung: Differentialgleichungen. Mit 10 in den Text gedruckten Figuren. [304 S.] gr. 8. 1903. geh. n. *M.* 6.—
2. Lieferung: Differentialgleichungen und Variationsrechnung. Mit 33 in den Text gedruckten Fig. [XII u. 464 S.] gr. 8. 1904. geh. n. *M.* 3.—

Stephan, P., Regierungsbaumeister, Lehrer an der Königl. höheren Maschinenbauschule in Posen, Die technische Mechanik. Elementares Lehrbuch für mittlere maschinentechnische Fachschulen und Hilfsbuch für Studierende höherer technischer Lehranstalten. Erster Teil: Mechanik starrer Körper. Mit 255 Figuren im Text. [VIII u. 344 S.] gr. 8. 1904. geb. *M.* 7.—

Study, E., Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie. Mit in den Text gedruckten Figuren und einer Tafel. [XIII u. 603 S.] gr. 8. 1903. geh. n. *M.* 21.—, geb. n. *M.* 23.—

Weber, H., Professor in Straßburg, und **J. Wellstein,** Professor in Gießen, Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer u. Studierende. In 3 Bänden. [I. Elementare Algebra und Analysis. II. Elementare Geometrie. III. Anwendung der Elementarmathematik.] I. Band. [XIV u. 446 S.] gr. 8. 1903. In Leinw. geb. n. *M.* 8.— [Bd. II u. III. 1904. Unter d. Presse.]

Wölffing, Dr. Ernst, Professor an der Königl. Techn. Hochschule zu Stuttgart, Mathematischer Bücherschatz. Systematisches Verzeichnis d. wichtigsten deutschen und ausländischen Lehrbücher u. Monographien d. 19. Jahrhunderts a. d. Gebiete d. mathematischen Wissenschaften. In zwei Teilen. I. Teil: Reine Mathematik. Mit einer Einleitung: Kritische Übersicht über die bibliographischen Hilfsmittel der Mathematik. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. Heft XVI, 1. [XXXVI u. 416 S.] gr. 8. 1903. geh. n. *M.* 14.—, geb. n. *M.* 15.—

Zeuthen, G. H., Professor an der Universität Kopenhagen, Geschichte der Mathematik im 16. und 17. Jahrhundert. Deutsch von Raphael Meyer. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. XVII. Heft. [VIII u. 434 S.] gr. 8. 1903. geh. n. *M.* 16.—

UNIVERSITY OF MAINE
3 7550 01697256 5

[Fortsetzung von S. 2 des Umschlags.]

*9. Trigonometrische Interpolation: **H. Burkhardt** in Zürich.
*10. Kugelfunktionen: **A. Wangerlin** in Halle.
11a. Unendliche trigonometrische Reihen: **H. Burkhardt** in Zürich.
11b. Allgemeine Reihenentwickelungen: **H. Burkhardt** in Zürich.
12. Funktional-Gleichungen und -Operationen: **S. Pincherle** in Bologna.

Ergänzung zum I. Teil des II. Bandes.

13. Algebraische Analysis: **A. Pringsheim** in München und **G. Faber** in Traunstein.

II. Teil.

Inhaltsverzeichnis von Band II, Teil 2.

B. Analysis komplexer Größen.

*1. Allgemeine Theorie der analytischen Funktionen a) einer und b) mehrerer komplexen Größen: **W. F. Osgood** in Cambridge, Mass.
*2. Algebraische Funktionen und ihre Integrale: **W. Wirtinger** in Innsbruck.
3. Elliptische Funktionen: **J. Harkness** in Bryn Mawr Coll., Pa.
4. Automorphe Funktionen: **R. Fricke** i. Braunschweig.
5. Abel'sche Funktionen: **J. Wellstein** in Gießen.
6. Thetafunktionen: **A. Krazer** in Straßburg und **W. Wirtinger** in Wien.
7. Lineare Differentialgleichungen: **H. Burkhardt** in Zürich.
8. Nichtlineare Differentialgleichungen: **P. Painlevé** in Paris.

Ergänzung zum II. Teil des II. Bandes.

9. Arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen: **K. Hensel** in Marburg a/L.

Register zu Band II.

Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

Unter der Abteilung Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften nimmt die Redaktion des Archivs der Mathematik und Physik (herausg. von E. Lampe, W. Franz Meyer und E. Jahnke) ihr aus dem Leserkreise zugehende Verbesserungsvorschläge und Ergänzungen (auch in literarischer Hinsicht) zu den erschienenen Heften der Encyklopädie auf. Diesbezügliche Einsendungen sind an den Unterzeichneten zu richten. Beiträge für den Sprechsaal haben bisher beigesteuert die Herren W. Ahrens, M. Böcher, A. v. Braunmühl, T. J. I'A. Bromwich, H. Burkhardt, G. Eneström, H. Fehr, E. Jahnke, F. Klein, M. Koppe, M. Krause, Josef Kürschák, A. Loewy, Gino Loria, J. Lüroth, W. Fr. Meyer, E. Müller, E. Netto, M. Noether, W. Osgood, C. Runge, L. Saalschütz, Carl Schmidt, A. Schoenflies, F. Schur, Th. Vahlen, K. v. Wesendonck, W. Wirtinger.

W. Fr. Meyer, Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51.

B. G. Teubners Mathematische Zeitschriften.

Mathematische Annalen. Begründet 1868 durch A. Clebsch und C. Neumann. Hrsg. von **F. Klein, W. v. Dyck, D. Hilbert.** 58. Band. 1904. gr. 8. Preis für den Band von 4 Heften n. *M.* 20.—. **Generalregister** zu den Bänden 1—50, zusammengestellt von A. Sommerfeld. Mit Porträt von A. Clebsch. [XI u. 202 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 7.—

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von **Gustav Eneström.** III. Folge. 5. Band. 1904. gr. 8. Preis für den Band von 4 Heften n. *M.* 20.—

Zeitschrift für Mathematik und Physik. Begründet 1856 durch O. Schlömilch. **Organ für angewandte Mathematik.** Hrsg. von **R. Mehmke** und **C. Runge.** 50. Band. 1904. gr. 8. Preis für den Band von 4 Heften n. *M.* 20.—. **Generalregister** zu den Jahrgängen 1—25. [123 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 3.60.

Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. In Monatsheften herausgegeben von **A. Gutzmer.** 13. Band. 1904. gr. 8. Preis für den Band von 12 Heften n. *M.* 18.—

Archiv der Mathematik und Physik. Gegründet 1841 durch J. A. Grunert. III. Reihe. Im Anhang: Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. Herausgegeben von **E. Lampe, W. Franz Meyer** und **E. Jahnke.** 8. Band. 1904. Preis für den Band von 4 Heften n. *M.* 14.—. **Generalregister** zu Reihe I, Bd. 1—70 [468 S.], n. *M.* 10.—; zu Reihe II, Bd. 1—17, zusammengestellt von E. Jahnke. [XXXI u. 114 S.], n. *M.*

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Ein Orga Methodik, Bildungsgehalt und Organisation der exakten Unterrichtsfächer an Gymn Realschulen, Lehrerseminarien und gehobenen Bürgerschulen. Begründet 1869 J. C. V. Hoffmann. Herausgegeben von **H. Schotten.** 35. Jahrg. 1904. gr. 8. für den Jahrgang von 8 Heften n. *M.* 12.—. **Generalregister** zu den Jahrgängen unter der Presse.

Revue semestrielle des Publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la S mathématique d'Amsterdam par P. H. Schoute (Groningen), D. J. Korteweg (Am dam), J. C. Kluyver (Leyden), W. Kapteyn (Utrecht), P. Zeeman (Delft). geh. 12. Jahrgang. 1904. Jährlich 2 Hefte. Jeder Jahrgang n. *M.* 7.—

Mathematisch-naturwissenschaftliche Blätter. Organ des Verbandes mathematischer naturwissenschaftlicher Vereine an deutschen Hochschulen. 1. Jahrg. 1904. Prei den Jahrgang von 12 Nummern *M.* 3.—. Einzelnummer 40 ₰.

S0-GBG-999